JOURNAL OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 12, Number 1, January 1999, Pages 241–268
S 0894-0347(99)00281-7

THÉORIE D'IWASAWA DES REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES D'UN CORPS LOCAL

FRÉDÉRIC CHERBONNIER AND PIERRE COLMEZ

Introduction

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la classification, introduite par Fontaine [8], des représentations p-adiques du groupe de Galois absolu d'un corps local en termes de (φ, Γ)-modules. Avant d'aller un peu plus loin, introduisons quelques notations qui nous servirons dans tout l'article.

On se fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$ et toutes les extensions finies de $\mathbf{Q}_p$ que nous aurons à considérer seront supposées être des sous-corps de $\overline{\mathbf{Q}}_p$. On note $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et $\chi : \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique.

Received by the editors November 3, 1997 and, in revised form, June 2, 1998.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11Sxx.

Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et $n \in \mathbf{N}$, on pose $K_n = K(\mu_{p^n})$ et on note K_∞ l'extension cyclotomique de K réunion des K_n. On note aussi $\mathcal{G}_K$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K)$ et $\mathcal{H}_K$ le noyau de la restriction de χ à $\mathcal{G}_K$. On a $\mathcal{H}_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K_\infty)$ et on pose $\Gamma_K = \mathcal{G}_K/\mathcal{H}_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$.

La théorie des (φ, Γ)-modules associe à toute représentation p-adique V de $\mathcal{H}_K$ un module $D(V)$ sur un corps local de dimension 2 (anneau de séries de Laurent en une variable à coefficients dans une extension finie non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$) muni d'une action d'un Frobenius φ et d'un inverse à gauche ψ de φ. Si V est la restriction à $\mathcal{H}_K$ d'une représentation de $\mathcal{G}_K$, le module $D(V)$ est de plus muni d'une action résiduelle de Γ_K commutant à celle de φ. L'intérêt principal de cette théorie est que l'on peut reconstruire V à partir de $D(V)$ qui est a priori un objet plus maniable. En effet, le groupe Γ_K étant essentiellement procyclique, $D(V)$ est donné par l'action de deux opérateurs (φ et un générateur de Γ_K) vérifiant une relation de commutation. L'étude des représentations p-adiques de $\mathcal{G}_K$ étant ainsi équivalente à celle des (φ, Γ)-modules, cela nous amène à considérer deux types de questions. On voudrait premièrement arriver à lire les propriétés d'une représentation sur son (φ, Γ)-module, l'idée étant que plus la représentation p-adique est sympathique, plus son (φ, Γ)-module doit être sympathique et deuxièmement essayer de reconstruire à partir de $D(V)$ les autres invariants associés à V et d'utiliser $D(V)$ pour associer à V de nouveaux invariants. Dans cette direction, Herr a montré dans sa thèse [11] comment décrire la cohomologie galoisienne de V en termes de $D(V)$. Les deux résultats principaux exposés dans cet articles sont

(i) la construction (due à Fontaine) d'un isomorphisme $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}$ du module d'Iwasawa $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V) = \mathbf{Q}_p \otimes (\varprojlim H^1(K_n, T))$ sur $D(V)^{\psi=1}$ (dans la définition de $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$, on a choisi un réseau T de V stable par $\mathcal{G}_K$ et la limite inverse est prise relativement aux applications de corestriction),

(ii) une loi de réciprocité explicite exprimant cette application $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}$, dans le cas où V est de de Rham, en termes des applications exponentielles de Bloch et Kato [1, 12].

Le premier de ces résultats utilise les résultats de Herr mentionnés ci-dessus et fournit une description de $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$ en termes de $D(V)$. D'autre part, dans le cas où $V = \mathbf{Q}_p(1)$ et K est non-ramifié sur $\mathbf{Q}_p$, l'application $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}$ se décrit en termes de dérivées logarithmiques des séries de Coleman [4]. On obtient donc, sans aucune hypothèse sur la représentation V, une généralisation de l'isomorphisme de Coleman qui est nettement plus simple que celle obtenue par Perrin-Riou dans [13] dans le cas où V est cristalline et étendue au cas de Rham dans [5].

La loi de réciprocité utilise le fait qu'une représentation de $\mathcal{G}_K$ est plus sympathique qu'une représentation générale de $\mathcal{H}_K$: elle est surconvergente [2, 3]. Cette surconvergence est l'ingrédient permettant de faire le lien entre $D(V)$ et les invariants de V construits à partir des anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, etc. Si on compare la loi de réciprocité obtenue dans cet article, avec celle obtenue dans [5], on obtient une relation entre $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}$ et les applications $\mathrm{Log}^{(h)}_V$ construites dans [5], applications qui, dans le cas où V est cristalline et K non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$, sont des inverses (à normalisation près) de l'exponentielle de Perrin-Riou [13]. En gros, on passe de $\mathrm{Log}^{(h)}_V$ à $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}$ en dérivant. Reconstruire $\mathrm{Log}^{(h)}_V$ à partir de $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}$ est plus délicat (il est plus facile de dériver que de calculer une intégrale) et le problème n'est pas vraiment abordé dans cet article.

Finalement, signalons que cette double construction de $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}$ est utilisée dans [6] pour montrer que, si K est non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$, une représentation cristalline de $\mathcal{G}_K$ est, du point de vue des (φ,Γ)-modules, le plus sympathique possible: elle est de hauteur finie.

I. Rappels sur les (φ,Γ)-modules et les représentations p-adiques

Nous renvoyons à [8] pour les démonstrations des faits rappelés dans ce chapitre. Nous avons pris la liberté de changer les notations pour les rendre un peu plus homogènes. Par exemple, les anneaux que nous notons $\widetilde{\mathbf{E}}$, $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\mathbf{A}$ correspondent respectivement aux anneaux $\mathrm{Frac}(R)$, $W(\mathrm{Frac}(R))$ et $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}}$ de [8].

1. **Le corps $\widetilde{\mathbf{E}}$ et certains de ses sous-anneaux.** Soit $\mathbf{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ pour la topologie p-adique. Soit $\widetilde{\mathbf{E}}$ l'ensemble des suites $x = (x^{(0)},\dots,x^{(n)},\dots)$ d'éléments de $\mathbf{C}_p$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$. On munit $\widetilde{\mathbf{E}}$ des lois $+$ et $\cdot$ définies par $x+y=s$ où $s^{(n)} = \lim_{m\to+\infty}(x^{(n+m)}+y^{(n+m)})^{p^m}$ et $x\cdot y = t$, avec $t^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}$, ce qui fait de $\widetilde{\mathbf{E}}$ un corps de caractéristique p algébriquement clos et complet pour la valuation $v_{\mathbf{E}}$ définie par $v_{\mathbf{E}}(x) = v_p(x^{(0)})$. On note $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{E}}$. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ contenant p et distinct de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$, alors $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ s'identifie aussi à la limite projective des A_n, où, si $n\in\mathbf{N}$, on a posé $A_n = \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}/\mathfrak{a}$ et l'application de transition de A_{n+1} dans A_n est donnée par $x\to x^p$.

Soit $\varepsilon = (1,\varepsilon^{(1)},\dots,\varepsilon^{(n)},\dots)$ un élément de $\widetilde{\mathbf{E}}$ tel que $\varepsilon^{(1)}\neq 1$, ce qui implique que $\varepsilon^{(n)}$ est une racine primitive p^n-ième de l'unité si $n\geq 1$. On a $v_{\mathbf{E}}(\varepsilon-1) = \frac{p}{p-1}$ et on note $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$ le sous-corps $\mathbf{F}_p((\varepsilon-1))$ de $\widetilde{\mathbf{E}}$. On note $\mathbf{E}$ la clôture séparable de $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$ dans $\widetilde{\mathbf{E}}$ et $\mathbf{E}^+$ (resp. $\mathfrak{m}_{\mathbf{E}}$) l'anneau de ses entiers (resp. l'idéal maximal de $\mathbf{E}^+$).

La théorie de la ramification supérieure permet de démontrer que si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, alors quel que soit $\eta>0$, il existe $n_\eta\in\mathbf{N}$ tel que si $n\geq n_\eta$, si $x\in\mathcal{O}_{K_{n+1}}$ et si $\sigma\in\Gamma_{K_n}$, alors $v_p(\sigma(x)-x)\geq\frac{1}{p-1}-\eta$. On en déduit en particulier le fait que si $\mathfrak{a}$ est l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ défini par $\mathfrak{a} = \{x\in\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}\mid v_p(x)\geq\frac{1}{p}\}$, alors $\mathrm{N}_{K_{n+1}/K_n}(x) - x^p\in\mathfrak{a}$ si n est assez grand et $x\in\mathcal{O}_{K_{n+1}}$. Ceci permet de construire une application ι_K de la limite projective $\varprojlim\mathcal{O}_{K_n}$ des $\mathcal{O}_{K_n}$ relativement aux applications normes dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$, application qui à $u = (u^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ associe $\iota_K(u) = (x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, où $x^{(n)}$ est l'image de $u^{(n)}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}/\mathfrak{a}$ si n est assez grand. La théorie du corps des normes ([7] et [14]) permet alors de démontrer le résultat suivant que nous utiliserons au chapitre V.

Proposition I.1.1. *Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, alors ι_K induit une bijection de $\varprojlim\mathcal{O}_{K_n}$ sur l'anneau des entiers $\mathbf{E}_K^+$ de $\mathbf{E}_K = \mathbf{E}^{\mathcal{H}_K}$.*

La même théorie permet de montrer que $\mathbf{E}_K$ est une extension finie séparable de $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$ de degré $[\mathcal{H}_{\mathbf{Q}_p}:\mathcal{H}_K] = [K_\infty:\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})]$ et d'identifier $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_K)$ avec $\mathcal{H}_K$.

Remarque I.1.2. i) Si F est une extension finie non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ de corps résiduel k_F, le corps $\mathbf{E}_F$ est le composé de k_F et $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$ et donc n'est autre que $k_F((\pi))$.

ii) Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et $F = K\cap\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$, alors $\mathbf{E}_K$ est une extension de $\mathbf{E}_F$ de degré $[K_\infty:F_\infty]$ qui est aussi égal à $[K_n:F_n]$ si n est assez grand.

L'ingrédient principal pour démontrer l'inégalité $[\mathbf{E}_K : \mathbf{E}_F] \geq [K_\infty : F_\infty]$ est le suivant. Si $m \in \mathbf{N}$, soit ω_m une uniformisante de K_m et posons $\omega_m^{(n)} = \mathrm{N}_{K_m/K_n}(\omega_m)$ si $n \leq m$ et $\omega_m^{(n)} = 0$ si $n \geq m+1$. Le produit $\prod_{m\in\mathbf{N}} \mathcal{O}_{K_m}$ étant compact, la suite de suites $\big((\omega_m^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}\big)_{m\in\mathbf{N}}$ a une valeur d'adhérence $\omega = (\omega^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ appartenant à $\varprojlim \mathcal{O}_{K_n}$ et $\omega^{(n)}$ est une uniformisante de K_n si K_∞/K_n est totalement ramifiée, ce qui est le cas si n est assez grand. Ceci implique $v_{\mathbf{E}}(\iota_K(\omega)) = \frac{1}{[K_\infty:F_\infty]} v_{\mathbf{E}}(\pi)$ et montre que $\mathbf{E}_K$ contient une extension de $\mathbf{E}_F$ d'indice de ramification divisible par $[K_\infty : F_\infty]$. Sachant que $[\mathbf{E}_K : \mathbf{E}_F] = [K_\infty : F_\infty]$, cela implique de plus que l'élément $\overline{\pi}_K = \iota_K(\omega)$ construit ci-dessus est une uniformisante de $\mathbf{E}_K$.

2. **Le corps $\widetilde{\mathbf{B}}$ et certains de ses sous-anneaux.** Soit $\widetilde{\mathbf{A}} = W(\widetilde{\mathbf{E}})$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{A}}[\frac{1}{p}] = \mathrm{Frac}(\widetilde{\mathbf{A}})$, ce qui fait de $\widetilde{\mathbf{B}}$ un corps muni d'une valuation discrète complet, d'anneau de valuation $\widetilde{\mathbf{A}}$ et de corps résiduel $\widetilde{\mathbf{E}}$. Si $x \in \widetilde{\mathbf{E}}$, on note $[x]$ son représentant de Teichmüller dans $\widetilde{\mathbf{A}}$. Tout élément x de $\widetilde{\mathbf{A}}$ s'écrit donc de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ et tout élément de $\widetilde{\mathbf{B}}$ sous la forme $\sum_{k\gg-\infty}^{+\infty} p^k[x_k]$.

On munit $\widetilde{\mathbf{A}}$ de la topologie obtenue en prenant les $\pi^k W(\widetilde{\mathbf{E}}^+) + p^{n+1}\widetilde{\mathbf{A}}$, pour $k, n \in \mathbf{N}$, comme base de voisinages de 0. C'est aussi la topologie qui fait de l'application $x \to (x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ un homéomorphisme de $\widetilde{\mathbf{A}}$ sur $\widetilde{\mathbf{E}}^{\mathbf{N}}$ muni de la topologie produit ($\widetilde{\mathbf{E}}$ étant muni de la topologie définie par la valuation $v_{\mathbf{E}}$) et on munit $\widetilde{\mathbf{B}} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} p^{-n}\widetilde{\mathbf{A}}$ de la topologie de la limite inductive. L'action de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\widetilde{\mathbf{E}}$ se prolonge en une action continue sur $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}$ qui commute à celle du morphisme de Frobenius φ.

Soit $\pi = [\varepsilon] - 1$. Soit $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ l'adhérence dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ de $\mathbf{Z}_p[\pi, \frac{1}{\pi}]$. C'est l'ensemble des éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}$ de la forme $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n\pi^n$ où a_n est une suite d'éléments de $\mathbf{Z}_p$ tendant vers 0 quand n tend vers $-\infty$. L'anneau $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ est un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$. Comme

$$\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1 \quad \text{et} \quad g(\pi) = (1+\pi)^{\chi(g)} - 1 \text{ si } g \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p},$$

l'anneau $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ et son corps des fractions $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}[\frac{1}{p}]$ sont stables par φ et $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

On note $\mathbf{B}$ l'adhérence de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}$ contenue dans $\widetilde{\mathbf{B}}$ et $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{A}}$ de telle sorte que l'on a $\mathbf{B} = \mathbf{A}[\frac{1}{p}]$, que $\mathbf{A}$ est un anneau de valuation discrète complet dont le corps des fractions est $\mathbf{B}$ et le corps résiduel est $\mathbf{E}$. L'anneau $\mathbf{A}$ et le corps $\mathbf{B}$ sont stables par φ et $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on pose $\mathbf{A}_K = \mathbf{A}^{\mathcal{H}_K}$ et $\mathbf{B}_K = \mathbf{B}^{\mathcal{H}_K}$, ce qui fait de $\mathbf{A}_K$ un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel $\mathbf{E}_K$ et de corps des fractions $\mathbf{B}_K = \mathbf{A}_K[\frac{1}{p}]$. D'autre part, si $K = \mathbf{Q}_p$, les deux définitions de $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{B}_K$ coincident.

Si L est une extension finie de K, $\mathbf{B}_L$ est une extension non ramifiée de $\mathbf{B}_K$ de degré $[L_\infty : K_\infty]$. Si l'extension L/K est de plus supposée galoisienne, alors les extensions $\widetilde{\mathbf{B}}_L/\widetilde{\mathbf{B}}_K$ et $\mathbf{B}_L/\mathbf{B}_K$ sont aussi galoisiennes de groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\widetilde{\mathbf{B}}_L/\widetilde{\mathbf{B}}_K) = \mathrm{Gal}(\mathbf{B}_L/\mathbf{B}_K) = \mathrm{Gal}(\mathbf{E}_L/\mathbf{E}_K) = \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty) = \mathcal{H}_K/\mathcal{H}_L$.

3. **Le (φ, Γ_K)-module associé à une représentation de $\mathcal{G}_K$.**

Définition I.3.1. i) On appelle $\mathbf{Z}_p$-représentation de $\mathcal{G}_K$, un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini muni d'une action $\mathbf{Z}_p$-linéaire continue de $\mathcal{G}_K$.

ii) On appelle représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$ tout $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire continue de $\mathcal{G}_K$.

Définition I.3.2. Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on appelle (φ, Γ_K)-module sur $\mathbf{A}_K$ (resp. $\mathbf{B}_K$) tout $\mathbf{A}_K$-module de rang fini (resp. tout $\mathbf{B}_K$-espace vectoriel de dimension finie) muni d'une action de Γ_K et d'une action de φ commutant à celle de Γ_K.

Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation ou une représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$, on pose

$$D(V) = (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathcal{H}_K}.$$

L'action de φ sur $\mathbf{A}_K$ commutant à celle de $\mathcal{G}_K$, $D(V)$ est muni d'une action de φ qui commute à l'action résiduelle de $\mathcal{G}_K/\mathcal{H}_K = \Gamma_K$, ce qui fait de $D(V)$ un (φ, Γ_K)-module sur $\mathbf{A}_K$ ou $\mathbf{B}_K$ suivant que V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation ou une représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$.

D'autre part, si V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation ou une représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$, alors $(\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}_K} D(V))^{\varphi=1}$ est canoniquement isomorphe à V en tant que représentation de $\mathcal{G}_K$. En d'autres termes, V est déterminée par son (φ, Γ_K)-module $D(V)$.

4. (φ, Γ)**-modules et cohomologie galoisienne.** Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ telle que Γ_K soit isomorphe à $\mathbf{Z}_p$ (i.e. contienne $\mathbf{Q}_p(\mu_p)$ si $p \geq 3$ ou une des trois extensions quadratiques ramifiées de $\mathbf{Q}_2$ si $p = 2$) et γ un générateur de Γ_K. Si V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation ou une représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$ et $f : D(V) \to D(V)$ est une application $\mathbf{Z}_p$-linéaire commutant à l'action de Γ (dans les applications, f sera soit φ soit l'opérateur ψ définie au paragraphe suivant), on note $C_{f,\gamma}(K, V)$ le complexe

$$0 \longrightarrow D(V) \longrightarrow D(V) \oplus D(V) \longrightarrow D(V) \longrightarrow 0,$$

où les applications de $D(V)$ dans $D(V) \oplus D(V)$ et de $D(V) \oplus D(V)$ dans $D(V)$ sont respectivement définies par

$$x \to ((f-1)x, (\gamma-1)x) \quad \text{et} \quad (a, b) \to (\gamma - 1)a - (f-1)b.$$

On note $Z^i(C_{f,\gamma}(K,V))$ (resp. $B^i(C_{f,\gamma}(K,V))$, resp. $H^i(C_{f,\gamma}(K,V)) = \frac{Z^i(C_{f,\gamma}(K,V))}{B^i(C_{f,\gamma}(K,V))}$) le i-ème groupe de cocycles (resp. de cobords, resp. de cohomologie) du complexe $C_{f,\gamma}(K, V)$.

Les $H^i(C_{\varphi,\gamma}(K,V))$ s'identifient canoniquement et fonctoriellement aux groupes de cohomologie galoisienne $H^i(K, V)$ (cf. [11]). La proposition I.4.1 ci-dessous décrit cette identification dans le cas du H^1. Soit $\Lambda_K = \mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]]$ l'algèbre de groupe complétée de Γ_K. Comme Γ_K agit continuement sur $D(V)$, on peut aussi considérer $D(V)$ comme un Λ_K-module. D'autre part, Γ_K étant cyclique, si γ est un générateur de Γ_K et γ' est n'importe quel élément de Γ_K, alors l'élément $\frac{\gamma'-1}{\gamma-1}$ de $\mathrm{Frac}(\Lambda_K)$ appartient en fait à Λ_K. De plus, $\mathcal{G}_K$ agissant à travers Γ_K sur $D(V)$, cela permet de donner un sens à l'expression $\frac{\sigma-1}{\gamma-1}y$ si $y \in D(V)$, $\sigma \in \mathcal{G}_K$ et γ est un générateur de Γ_K.

Proposition I.4.1. *i) Si $(x, y) \in Z^1(C_{\varphi,\gamma}(K, V))$ et $b \in \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$ est une solution de l'équation $(\varphi - 1)b = x$, alors $\sigma \to c_{x,y}(\sigma) = \frac{\sigma-1}{\gamma-1}y - (\sigma - 1)b$ est un cocycle sur $\mathcal{G}_K$ à valeurs dans V.*

ii) L'application qui à $(x,y) \in Z^1(C_{\varphi,\gamma}(K,V))$ associe la classe de $c_{x,y}$ dans $H^1(K,V)$ induit un isomorphisme $\iota_{\varphi,\gamma}$ de $H^1(C_{\varphi,\gamma}(K,V))$ sur $H^1(K,V)$.

Démonstration. Le fait que $\sigma \to c_{x,y}(\sigma)$ soit un cocycle est apparent sur sa définition. D'autre part, on a

$$(\varphi-1)(c_{x,y}(\sigma)) = \frac{\sigma-1}{\gamma-1}((\varphi-1)y) - (\sigma-1)x = 0$$

car $(\gamma-1)x = (\varphi-1)y$. On en déduit le fait que $c_{x,y}(\sigma) \in V$, ce qui prouve le i).

Passons au ii). Si l'image de $c_{x,y}$ dans $H^1(K,V)$ est nulle, c'est qu'il existe $z \in V$ tel que l'on ait

$$\frac{\sigma-1}{\gamma-1}y - (\sigma-1)(b+z) = 0 \quad \text{quel que soit } \sigma \in \mathcal{G}_K.$$

On en déduit le fait que $b+z$ est stable par $\mathcal{H}_K$ et donc élément de $D(V)$ et, prenant $\sigma = \gamma$, que l'on a $y = (\gamma-1)(b+z)$. Comme on a de plus $x = (\varphi-1)(b+z)$, cela implique que $(x,y) \in B^1(C_{\varphi,\gamma}(K,V))$ et permet de montrer l'injectivité de $\iota_{\varphi,\gamma}$.

Passons à sa surjectivité. Soient $c \in H^1(K,V)$ et V' l'extension de $\mathbf{Z}_p$ par V correspondant à c. Soit $e \in V'$ relevant l'élément $1 \in \mathbf{Z}_p$. On a donc $\sigma(e) = e + c_\sigma$, où $\sigma \to c_\sigma$ est un cocycle sur $\mathcal{G}_K$ à valeurs dans V représentant c. Soit $\tilde{e} \in D(V')$ relevant $1 \in \mathbf{Z}_p \subset D(\mathbf{Z}_p)$ et x, y les éléments de $D(V)$ définis par $x = (\varphi-1)\tilde{e}$ et $y = (\gamma-1)\tilde{e}$. Comme γ et φ commutent, (x,y) appartient à $Z^i(C_{\varphi,\gamma}(K,V))$. D'autre part, $b = \tilde{e} - e \in \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$ vérifie $(\varphi-1)b = x$, ce qui fait que l'on a

$$c_{x,y}(\sigma) = \frac{\sigma-1}{\gamma-1}y - (\sigma-1)b = (\sigma-1)(\tilde{e}-b) = (\sigma-1)e = c_\sigma.$$

On en déduit la surjectivité de $\iota_{\varphi,\gamma}$.

Le complexe $C_{\varphi,\gamma}(K,V)$ dépend du choix de γ de manière assez transparente. Si γ' est un autre générateur de Γ_K, alors $\frac{\gamma-1}{\gamma'-1} \in \mathrm{Frac}(\Lambda_K)$ est une unité de Λ_K et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
C_{\varphi,\gamma}(K,V): 0 \arrow[r] & D(V) \arrow[r] \arrow[d, "\frac{\gamma-1}{\gamma'-1}"] & D(V)\oplus D(V) \arrow[r] \arrow[d, "\frac{\gamma-1}{\gamma'-1}\oplus \mathrm{id}"] & D(V) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
C_{\varphi,\gamma'}(K,V): 0 \arrow[r] & D(V) \arrow[r] & D(V)\oplus D(V) \arrow[r] & D(V) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est commutatif comme le montre un petit calcul immédiat. Il induit, en passant à la cohomologie, un isomorphisme naturel $\iota_{\gamma,\gamma'}$ de $H^1(C_{\varphi,\gamma}(K,V))$ sur $H^1(C_{\varphi,\gamma'}(K,V))$.

Soit $r(K)$ l'entier défini par $\log\chi(\Gamma_K) = p^{r(K)}\mathbf{Z}_p$ et soit $\ell_K : \Gamma_K \to \mathbf{Z}_p$ le morphisme donné par la formule $\ell_K(\gamma) = \frac{\log\chi(\gamma)}{p^{r(K)}}$. Avec la normalisation que l'on a choisie, si γ est un générateur de Γ_K, alors $\ell_K(\gamma) \in \mathbf{Z}_p^*$. Le lemme suivant montre que $\ell_K(\gamma)\iota_{\varphi,\gamma}$ "ne dépend pas" du choix du générateur γ de Γ_K.

Lemme I.4.2. *Si γ et γ' sont deux générateurs de Γ_K, alors les isomorphismes $\ell_K(\gamma)\iota_{\varphi,\gamma}$ et $\ell_K(\gamma')\iota_{\varphi,\gamma'} \circ \iota_{\gamma,\gamma'}$ de $H^1(C_{\varphi,\gamma}(K,V))$ sur $H^1(K,V)$ sont égaux.*

Démonstration. Soit $(x,y) \in Z^1(C_{\varphi,\gamma}(K,V))$. Soit b (resp. b') un élément de $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$ vérifiant $(\varphi-1)b = x$ (resp. $(\varphi-1)b' = \frac{\gamma-1}{\gamma'-1}x$). Comme $\frac{\ell_K(\gamma)}{\gamma-1} - \frac{\ell_K(\gamma')}{\gamma'-1} \in \mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]]$, on peut écrire le cocycle associé à $\ell_K(\gamma')\iota_{\varphi,\gamma'} \circ \iota_{\gamma,\gamma'}(x,y) - \ell_K(\gamma)\iota_{\varphi,\gamma}(x,y)$ sous la forme $\sigma \to (\sigma-1)c$ avec

$$c = \Big(\frac{\ell_K(\gamma')}{\gamma'-1} - \frac{\ell_K(\gamma)}{\gamma-1}\Big)y - (\ell_K(\gamma')b' - \ell_K(\gamma)b)$$

et la relation $(\varphi-1)y=(\gamma-1)x$ implique que l'on a $(\varphi-1)c=0$, d'où l'on tire $c\in V$ et notre cocycle est donc un cobord, ce qui permet de conclure.

5. **L'opérateur ψ.** Le calcul de $H^1(C_{\gamma,\varphi}(K,V))$ fait intervenir les groupes $D(V)^{\varphi=1}$ et $\frac{D(V)}{\varphi-1}$. Le problème est que le groupe $\frac{D(V)}{\varphi-1}$ est assez compliqué à décrire. Pour palier à cette difficulté, on introduit un inverse à gauche de φ. Le corps $\mathbf{B}$ est une extension de degré p de $\varphi(\mathbf{B})$, ce qui nous permet de définir un opérateur $\psi:\mathbf{B}\to\mathbf{B}$ par la formule $\psi(x)=\frac{1}{p}\varphi^{-1}\big(\mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}(x)\big)$. L'opérateur ψ commute à l'action de $\mathcal{G}_K$ et on a $\psi(\varphi(x))=x$ si $x\in\mathbf{B}$ et $\psi(\mathbf{A})\subset\mathbf{A}$.

Comme ψ commute à l'action de $\mathcal{G}_K$, si V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation ou une représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$, le module $D(V)$ hérite de l'action de ψ qui commute à celle de Γ_K.

Proposition I.5.1. *Si V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation ou une représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$, alors $\gamma-1$ est inversible sur $D(V)^{\psi=0}$.*

Démonstration. C'est le point le plus délicat de la théorie. Cette proposition est démontrée dans [11] par dévissage en se ramenant au cas d'une $\mathbf{F}_p$-représentation et dans [3] en se ramenant au cas de la représentation triviale. L'énoncé démontré dans [3] est en fait plus précis: l'inverse de $\gamma-1$ préserve la surconvergence (cf. [3], proposition II.6.1). Nous aurons d'ailleurs besoin d'une version qualitative de ce dernier résultat (cf. iii) de la proposition III.3.2).

Lemme I.5.2. *L'application qui à $(x,y)\in Z^1(C_{\varphi,\gamma}(K,V))$ associe $(-\psi(x),y)\in Z^1(C_{\psi,\gamma}(K,V))$ induit un isomorphisme ι de $H^1(C_{\varphi,\gamma}(K,V))$ sur $H^1(C_{\psi,\gamma}(K,V))$.*

Démonstration. C'est un petit exercice de chasse au diagramme utilisant le fait que $\gamma-1$ est inversible sur $D(V)^{\psi=0}$. De manière explicite, si $(x,y)\in Z^1(C_{\psi,\gamma}(K,V))$, alors $(-\varphi(x)+\tau^{-1}(\varphi\psi(y)-y),y)\in Z^1(C_{\varphi,\gamma}(K,V))$, ce qui permet de montrer la surjectivité. D'autre part, si $(x,y)\in Z^1(C_{\varphi,\gamma}(K,V))$ est tel qu'il existe $a\in D(V)$ tel que l'on ait $(-\psi(x),y)=((\psi-1)a,(\gamma-1)a)$, alors $x'=x-(\varphi-1)a$ vérifie $\psi(x')=0$ et $\tau(x')=\tau(x)-(\varphi-1)(\tau(a))=(\varphi-1)y-(\varphi-1)y=0$, ce qui implique $x'=0$ et donc $x=(\varphi-1)a$ et $(x,y)\in B^1(C_{\varphi,\gamma}(K,V))$. On en déduit l'injectivité, ce qui termine la démonstration.

Notation I.5.3. On note $\iota_{\psi,\gamma}$ l'isomorphisme de $H^1(C_{\psi,\gamma}(K,V))$ sur $H^1(K,V)$ obtenu en composant $\iota_{\varphi,\gamma}$ et ι^{-1}.

Remarque I.5.4. La même démonstration que pour $C_{\varphi,\gamma}$ montre que $\ell_K(\gamma)\iota_{\psi,\gamma}$ "ne dépend pas" du choix du générateur γ de Γ_K.

Lemme I.5.5. *L'application qui à $(x,y)\in Z^1(C_{\psi,\gamma}(K,V))$ associe l'image de x dans $\frac{D(V)}{\psi-1}$ induit la suite exacte*

$$0\to\frac{D(V)^{\psi=1}}{\gamma-1}\to H^1(C_{\psi,\gamma}(K,V))\to\left(\frac{D(V)}{\psi-1}\right)^{\Gamma_K}\to 0.$$

Démonstration. $\overline{x}\in\frac{D(V)}{\psi-1}$ est stable par Γ_K si et seulement si il existe $x\in D(V)$ tel que $(\gamma-1)x\in(\psi-1)D(V)$ ou autrement dit, si et seulement si il existe $(x,y)\in Z^1(C_{\psi,\gamma}(K,V))$ dont l'image dans $\frac{D(V)}{\psi-1}$ est égale à $\overline{x}$. Le noyau de cette application est la somme de $B^1(C_{\psi,\gamma}(K,V))$ et de l'ensemble X des couples de la forme $(0,y)$ avec $y\in D(V)^{\psi=1}$ et le résultat découle du fait que $X\cap B^1(C_{\psi,\gamma}(K,V))$ est constitué des couples de la forme $(0,y)$ avec $y\in(\gamma-1)D(V)^{\psi=1}$.

L'intérêt de cet énoncé par rapport à l'énoncé analogue en remplaçant ψ par φ est que, comme on le verra dans le chapitre II, les modules $D(V)^{\psi=1}$ et $\frac{D(V)}{\psi-1}$ ont une interprétation naturelle en théorie d'Iwasawa. De plus, le module $\frac{D(V)}{\psi-1}$ est "petit" contrairement au module $\frac{D(V)}{\varphi-1}$, ce qui fait que l'on peut décrire $H^1(K,V)$ en terme principalement du sous-module $D(V)^{\psi=1}$. De manière précise, on a la proposition suivante dont la démonstration fait l'objet des deux paragraphes suivants.

Proposition I.5.6. *Si V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation (resp. une représentation p-adique) de $\mathcal{G}_K$, alors*

i) $D(V)^{\psi=1}$ est compact (resp. localement compact) et engendre le $\mathbf{A}_K$-module $D(V)$.

ii) $\frac{D(V)}{\psi-1}$ est un $\mathbf{Z}_p$-module de rang fini (resp. un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie).

Remarque I.5.7. Le cas d'une représentation p-adique se déduit de celui d'une $\mathbf{Z}_p$-représentation en tensorisant par $\mathbf{Q}_p$, ce qui fait que l'on peut se contenter de traiter le cas d'une $\mathbf{Z}_p$-représentation.

6. **Compacité du module $D(V)^{\psi=1}$.** Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant dont le cas particulier $x = 0$ et $N = +\infty$ est équivalent à la compacité de $D(V)^{\psi=1}$.

Lemme I.6.1. *Si V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation de $\mathcal{G}_K$, $x \in D(V)$ et $N \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, l'ensemble des solutions $y \in D(V)/p^{N+1}D(V)$ de l'équation $(\psi - 1)y = x$ est compact.*

Nous aurons besoin d'un certain nombre de résultats préliminaires. Soit $\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$ le sous-anneau $\mathbf{Z}_p[[\pi]]$ de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ et soit $A = \mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}[[\frac{p}{\pi^{p-1}}]]$, ce qui fait de A un sous-anneau compact de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ que l'on peut aussi décrire comme le sous-ensemble de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ des éléments $x = \sum_{n\in\mathbf{Z}} x_n\pi^n$ où $(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une suite d'éléments de $\mathbf{Z}_p$ telle que l'on ait $v_p(x_n) \geq -\frac{n}{(p-1)}$ si $n \leq 0$.

Si $x \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$, soit $w_n(x) \in \mathbf{N}$ le plus petit entier k tel que x appartienne à $\pi^{-k}A + p^{n+1}\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$. Si x est fixé, la suite des $w_n(x)$ est croissante et on a

$$\begin{aligned} w_n(x+y) &\leq \sup(w_n(x), w_n(y)), \\ w_n(xy) &\leq \sup_{i+j=n}(w_i(x)+w_j(y)) \leq w_n(x)+w_n(y), \\ w_n(\varphi(x)) &\leq pw_n(x), \end{aligned}$$

les deux premières inégalités provenant de ce que A est un anneau et la troisième du fait que $\frac{\varphi(\pi)}{\pi^p}$ est une unité de A (c'est d'ailleurs la raison pour travailler avec A au lieu de $\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$ pour définir les applications w_n) et donc que $x \in \pi^{-k}A + p^{n+1}\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ implique $\varphi(x) \in \varphi(\pi)^{-k}A + p^{n+1}\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p} = \pi^{-pk}A + p^{n+1}\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$.

Lemme I.6.2. *i) Si $k \in \mathbf{N}$, alors $\psi(\pi^k) \in \mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$ et $\psi(\pi^{-k}) \in \pi^{-k}\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$.*

ii) $\psi(A) \subset A$.

Démonstration. Le ii) est une conséquence immédiate du i) et de la définition de A. Comme $\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1$ est un polynôme unitaire de degré p en π et $[\varepsilon]^i = (1+\pi)^i$ est un polynôme unitaire de degré i en π, les $[\varepsilon]^i\varphi(\pi)^j$ pour

$0 \leq i \leq p-1$ et $j \in \mathbf{N}$ forment un base des polynômes en π et comme de plus $\psi([\varepsilon]^i\varphi(\pi)^j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0, \\ \pi^j & \text{si } i = 0, \end{cases}$ on en déduit le fait que $\psi(\pi^k) \in \mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$ si $k \geq 0$.

Finalement, si $k \geq 1$, alors $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}/\varphi(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p})}(\pi^{-k}) = \frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1}((1+\pi)\zeta-1)^{-k}$ peut s'écrire, en réduisant tout au même dénominateur, sous la forme $\frac{P(\varphi(\pi))}{\varphi(\pi)^k}$, où P est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$, ce qui permet de conclure.

Corollaire I.6.3. *Si $x \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ et $n \in \mathbf{N}$, alors $w_n(\psi(x)) \leq 1 + [\frac{w_n(x)}{p}] \leq 1 + \frac{w_n(x)}{p}$.*

Démonstration. $\frac{\varphi(\pi)}{\pi^p}$ est une unité de A et comme $\psi(\frac{x}{\varphi(\pi)^k}) = \frac{\psi(x)}{\pi^k}$, on a

$$\psi(\pi^{-kp}A + p^{n+1}\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}) = \psi(\varphi(\pi)^{-k}A + p^{n+1}\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}) \subset \pi^{-k}A + p^{n+1}\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p},$$

ce qui permet de conclure.

Si $U = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq d} \in \mathrm{M}_d(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p})$ et $n \in \mathbf{N}$, on définit $w_n(U)$ par la formule $w_n(U) = \sup_{i,j} w_n(a_{i,j})$. De même, si V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation de $\mathcal{G}_K$ et si $e_1, \dots, e_d$ est une base de $D(V)$ sur $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$, on pose $w_n(a) = \sup_i w_n(a_i)$ si $a = \sum_{i=1}^d a_ie_i \in D(V)$. Cette notation est un peu abusive car $w_n(a)$ dépend du choix de la base $e_1, \dots, e_d$ mais ce n'est pas très génant, la base de référence étant toujours évidente dans ce qui suit.

Lemme I.6.4. *Soient V une $\mathbf{Z}_p$-représentation de $\mathcal{G}_K$, $(e_1, \dots, e_d)$ une base de $D(V)$ sur $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ et $\Phi = (a_{i,j})$ la matrice définie par $e_j = \sum_{i=1}^d a_{i,j}\varphi(e_i)$. Si $x, y \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ vérifient la relation $(\psi-1)y = x$, alors $w_n(y) \leq \sup(w_n(x), \frac{p}{p-1}(w_n(\Phi)+1))$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. Décomposons x et y dans la base $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d)$ sous la forme $x = \sum_{i=1}^d x_i\varphi(e_i)$ et $y = \sum_{i=1}^d y_i\varphi(e_i)$. On a donc $\psi(y) = \sum_{i=1}^d \psi(y_i)e_i$ et la relation $\psi(y) - y = x$ se traduit par le système

$$y_i = -x_i + \sum_{j=1}^d a_{i,j}\psi(y_j) \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq d.$$

On en tire les inégalités

$$\begin{aligned} w_n(y_i) &\leq \sup\Big(w_n(x_i), \sup_{1\leq j\leq d}\big(w_n(a_{i,j}) + w_n(\psi(y_j))\big)\Big) \\ &\leq \sup\Big(w_n(x), w_n(\Phi) + \frac{w_n(y)}{p} + 1\Big) \end{aligned}$$

pour $1 \leq i \leq d$, ce qui nous donne finalement l'inégalité

$$w_n(y) \leq \sup\Big(w_n(x), w_n(\Phi) + 1 + \frac{1}{p}w_n(y)\Big)$$

et permet de conclure.

Déduisons-en le lemme I.6.1. Si $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, soient X_n l'ensemble des solutions de l'équation $(\psi-1)y = x$ dans $D(V)/p^{n+1}D(V)$. On cherche à montrer que X_N est compact. Si $n \in \mathbf{N}$, soit $r_n = \sup(w_n(x), \frac{p}{p-1}(w_n(\Phi)+1))$. L'ensemble X_n est un fermé (car $\psi - 1$ est continue) contenu, d'après le lemme précédent, dans l'image de $(\pi^{-r_n}A)^d$ qui est compacte car A l'est. Si N est fini, il suffit alors d'appliquer ce qui précède à $n = N$ pour conclure. Si $N = +\infty$, l'application qui à $x \in X_N$ associe la suite de ses images modulo p^{n+1} permet d'identifier X_N à un sous-ensemble fermé de l'ensemble compact $\prod_{n\in\mathbf{N}} X_n$, ce qui permet de conclure.

7. Le module $\frac{D(V)}{\psi-1}$.

Lemme I.7.1. *Si V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation de $\mathcal{G}_K$, le module $\frac{D(V)}{\psi-1}$ n'a pas d'élément p-divisible non nul.*

Démonstration. Soit x un élément p-divisible de $\frac{D(V)}{\psi-1}$. Il existe donc pour chaque $n \in \mathbf{N}$ des éléments y_n, z_n de $D(V)$ tels que l'on ait $x = p^n y_n + (\psi-1)z_n$. Si on fixe $m \in \mathbf{N}$ et si $n \geq m+1$, alors z_n est une solution de l'équation $\psi(z) - z = x$ modulo p^{m+1}. Comme l'ensemble de ces solutions est compact d'après le lemme I.6.1, on peut extraire de la suite des z_n une sous-suite telle que z_n converge modulo p^m. Un procédé d'extraction diagonale permet alors d'extraire une sous-suite de z_n qui converge modulo p^m pour tout m et donc qui a une limite z dans $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$. Par passage à la limite, on obtient $x = (\psi-1)z$ et donc $x = 0$ dans $\frac{D(V)}{\psi-1}$, ce qu'il fallait démontrer.

Lemme I.7.2. *Si V est une $\mathbf{F}_p$-représentation de $\mathcal{G}_K$ et $x \in \mathfrak{m}_E \otimes V$, alors les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^n(x)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi^n(x)$ convergent dans $\mathfrak{m}_E \otimes V$ et on a*

$$(\psi-1)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^n(x)\Big) = \psi(x) \quad \text{et} \quad (\psi-1)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi^n(x)\Big) = x.$$

Démonstration. Si $e_1, \dots, e_d$ est une base de V sur $\mathbf{F}_p$ et $x = x_1e_1 + \cdots + x_de_d \in \mathfrak{m}_E \otimes V$, il existe $r > 0$ tel que l'on ait $v_{\mathbf{E}}(x_i) \geq r$ quel que soit $1 \leq i \leq d$, ce qui implique que $v_{\mathbf{E}}(\varphi^n(x_i)) \geq p^n r$ tend vers $+\infty$ et donc que $\varphi^n(x)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit la convergence des séries. Les formules sont, quant à elles, des conséquences du fait que ψ est un inverse à gauche de φ.

Lemme I.7.3. *i) Si V est une $\mathbf{F}_p$-représentation de $\mathcal{G}_K$, alors $\frac{D(V)}{\psi-1}$ est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie.*

ii) Il existe un sous-groupe ouvert de Γ_K agissant trivialement sur $\frac{D(V)}{\psi-1}$.

Démonstration. Soit $M = (\mathfrak{m}_{\mathbf{E}} \otimes V)^{\mathcal{H}_K}$, ce qui fait de M un réseau de $D(V)$ stable par φ. Si $x \in M$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi^n(x)$ converge dans M et, d'après le lemme I.7.2, on a $x = (\psi-1)(\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi^n(x))$, ce qui prouve que $(\psi-1)D(V)$ contient M.

Comme ψ est continu, il existe $c \in \mathbf{N}$ tel que $\psi(M) \subset \pi^{-c}M$ et comme $\psi(\pi^{-pk}x) = \pi^{-k}\psi(x)$, on a $\psi(\pi^{-pk}M) \subset \pi^{-k-c}M$. On en déduit le fait que si $n \geq b = [\frac{pc}{p-1}] + 1$, alors $\psi = 0$ sur $\frac{\pi^{-n+1}M}{\pi^{-n}M}$ et donc que $\psi - 1$ est bijective sur $\frac{\pi^{-n+1}M}{\pi^{-n}M}$. Comme $D(V) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \pi^{-n}M$, ceci implique en particulier que l'application naturelle de $\frac{\pi^{-b}M}{\psi-1}$ dans $\frac{D(V)}{\psi-1}$ est un isomorphisme.

Pour démontrer le i), il suffit alors de remarquer que comme $(\psi-1)(M)$ contient M, cela implique que $\frac{D(V)}{\psi-1}$ est un quotient de $\frac{\pi^{-b}M}{M}$. Quant au ii), c'est une conséquence du fait que Γ_K laisse stable M et donc $\pi^k M$ quel que soit $k \in \mathbf{Z}$ et de ce que l'action de Γ_K étant continue sur $D(V)$ et M étant fermé dans $D(V)$, il existe un sous-groupe ouvert de Γ_K agissant trivialement sur $\frac{\pi^{-b}M}{M}$ puisque ce module est muni de la topologie discrète.

Corollaire I.7.4. *Si V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation de $\mathcal{G}_K$, le module $\frac{D(V)}{\psi-1}$ est un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini.*

Démonstration. $\frac{D(V)}{\psi-1}/p\frac{D(V)}{\psi-1} = \frac{D(V)}{(p,\psi-1)} = \frac{D(V/p)}{\psi-1}$ est un $\mathbf{F}_p$-module de type fini d'après le lemme précédent, ce qui permet de conclure, compte-tenu du lemme I.7.1.

On a donc démontré le ii) de la proposition I.5.6 et il ne reste plus qu'à démontrer que $D(V)^{\psi=1}$ engendre $D(V)$. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme I.7.5. *Si V est une $\mathbf{F}_p$-représentation de $\mathcal{G}_K$ et X est un sous-$\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de $D(V)^{\psi=1}$ de codimension finie, alors X contient une base de $D(V)$ sur $\mathbf{E}_K$.*

Démonstration. Soit, comme ci-dessus, $M = (\mathfrak{m}_{\mathbf{E}} \otimes V)^{\mathcal{H}_K}$. Commençons par remarquer que, d'après le lemme I.7.2, si $x \in M^{\psi=0}$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^n(x)$ converge dans $D(V)$ vers un élément de $D(V)^{\psi=1}$; nous le noterons $\mathrm{eul}(x)$. Soit $e_1, \ldots, e_d$ une base de M sur $\mathbf{E}_K^+$. Soit r la codimension de X dans $D(V)^{\psi=1}$. Si $1 \leq i \leq d$ et $j \geq 1$, soit $z_{i,j} = \mathrm{eul}(\varepsilon\varphi(\pi^j e_i))$. Si i et $n \geq 1$ sont fixés, les $z_{i,j}$ pour $n \leq j \leq n+r$ forment une famille de $r+1$ éléments de $D(V)^{\psi} = 1$ et comme X est de codimension r dans $D(V)^{\psi=1}$, on peut trouver des éléments $a_{i,j}^{(n)}$ de $\mathbf{F}_p$ pour $0 \leq j \leq r$ tels que $f_{i,n} = \sum_{j=0}^{r} a_{i,j}^{(n)} z_{i,j+n}$ appartienne à X. Soit $\beta_{i,n} = \pi^n \sum_{j=0}^{r} a_{i,j}^{(n)} \pi^j$. On a $\lim_{n\to+\infty} (\varepsilon\varphi(\beta_{i,n}))^{-1} f_{i,n} = \varphi(e_i)$, ce qui implique que le déterminant de $f_{1,n}, \ldots, f_{d,n}$ dans la base $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_d)$ est non nul si n est assez grand et donc que $f_{1,n}, \ldots, f_{d,n}$ est une base de $D(V)$ sur $\mathbf{E}_K$ si n est assez grand. Le lemme s'en déduit.

Corollaire I.7.6. *Si V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation de $\mathcal{G}_K$, alors $D(V)^{\psi=1}$ engendre le $\mathbf{A}_K$-module $D(V)$.*

Démonstration. Le lemme du serpent montre que le conoyau de l'injection de $D(V)^{\psi=1}/pD(V)^{\psi=1}$ dans $D(V/p)^{\psi=1}$ s'identifie au sous-groupe de p-torsion de $D(V)/\psi - 1$. En particulier, il est de dimension finie sur $\mathbf{F}_p$, ce qui permet d'utiliser le lemme précédent pour montrer que $D(V)^{\psi=1}/pD(V)^{\psi=1}$ contient une base de $D(V/p)$ sur $\mathbf{E}_K$ et il n'y a plus qu'à relever cette base pour obtenir une famille d'éléments de $D(V)^{\psi=1}$ engendrant $D(V)$ sur $\mathbf{A}_K$.

II. Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques

1. **Cohomologie d'Iwasawa.** Rappelons que si $n \in \mathbf{N}$, on note K_n le corps $K(\varepsilon^{(n)}) = K(\mu_{p^n})$. D'autre part, si $n \geq 1$ (resp. $n \geq 2$ si $p = 2$), le groupe Γ_{K_n} est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$, ce qui nous permettra d'utiliser les résultats des paragraphes 5 et 6 du chapitre I. On choisit un générateur γ_1 de Γ_{K_1} et on pose $\gamma_n = \gamma_1^{[K_n:K_1]}$ si $n \geq 1$ (si $p = 2$, on fait la même chose en commençant par $n = 2$), ce qui fait de γ_n un générateur de Γ_{K_n}.

Définition II.1.1. i) Si T est une $\mathbf{Z}_p$-représentation de $\mathcal{G}_K$ et $m \in \mathbf{N}$, on note $H^m_{\mathrm{Iw}}(K,T)$ la limite projective $\varprojlim H^m(K_n,T)$ des $H^m(K_n,T)$ relativement aux applications de corestriction.

ii) Si V est une représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$ et T est un $\mathbf{Z}_p$-réseau de V stable par $\mathcal{G}_K$, le groupe $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} H^m_{\mathrm{Iw}}(K,T)$ ne dépend pas du choix de T et sera noté $H^m_{\mathrm{Iw}}(K,V)$.

Le lemme de Shapiro permet de remplacer la limite projective dans la définition de $H^m_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ par un seul groupe de cohomologie. Si V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation ou une représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$, on munit $\Lambda \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$ de l'action naturelle diagonale. Si on considère $\Lambda \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$ comme l'espace des mesures sur Γ_K à valeurs dans V, la mesure $\sigma(\mu)$ est celle qui à une application continue $f : \Gamma_K \to V$ associe l'élément

$$\int_{\Gamma_K} f(x)\sigma(\mu) = \sigma\Big(\int_{\Gamma_K} f(\sigma x)\mu\Big) \in V.$$

Si V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation ou une représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$ et $k \in \mathbf{Z}$, on note $V(k)$ la tordue de V par la puissance k-ième du caractère cyclotomique et si $x \in V$, on note $x(k)$ son image dans $V(k)$.

Si $\mu \in H^m(K, \Lambda_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)$ et si $\tau \to \mu_{\tau_1,\dots,\tau_m}$ est un m-cocycle continu représentant μ, alors $\tau \to \big(\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^k \mu_{\tau_1,\dots,\tau_m}\big)(k)$ est un m-cocycle sur $\mathcal{G}_{K_n}$ à valeurs dans $V(k)$ dont la classe $\big(\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^k \mu\big)(k)$ dans $H^m(K_n, V(k))$ ne dépend que de μ et pas du choix du cocycle représentant μ.

Proposition II.1.2. *Soit V une $\mathbf{Z}_p$-représentation ou une représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$. Si $m \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{Z}$, l'application qui à μ associe $(\dots, \big(\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^k \mu\big)(k), \dots)$ est un isomorphisme de $H^m(K, \Lambda_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)$ sur $H^m_{\mathrm{Iw}}(K, V(k))$. En particulier, si $k \in \mathbf{Z}$, les groupes de cohomologie $H^m_{\mathrm{Iw}}(K, V)$ et $H^m_{\mathrm{Iw}}(K, V(k))$ sont isomorphes.*

Démonstration. ([5], proposition II.1.8.)

En vertu du lemme I.5.5, l'application ι_{ψ,γ_n} permet d'identifier $\frac{D(V)^{\psi=1}}{\gamma_n - 1}$ à un sous-groupe de $H^1(K_n, V)$. On obtient donc pour chaque $n \geq 1$ une application de $D(V)^{\psi=1}$ dans $H^1(K_n, V)$. Explicitement, si $y \in D(V)^{\psi=1}$, alors $(\varphi - 1)y \in D(V)^{\psi=0}$ et comme $\gamma_n - 1$ est inversible sur $D(V)^{\psi=0}$, il existe $x_n \in D(V)^{\psi=0}$ vérifiant $(\gamma_n - 1)x_n = (\varphi - 1)y$ (i.e. tel que $(x_n, y) \in Z^1_{\varphi,\gamma_n}(K_n, V)$). D'autre part, le lemme I.4.2 implique que l'image $\iota_{\psi,n}(y)$ de $\ell_{K_n}(\gamma_n)\iota_{\varphi,\gamma_n}(x_n, y)$ dans $H^1(K_n, V)$ ne dépend pas du choix de γ. On a donc de cette façon associé à tout élément $y \in D(V)^{\psi=1}$ une collection de classes de cohomologie galoisienne $\iota_{\psi,n}(y) \in H^1(K_n, V)$ pour $n \geq 1$. Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant dû à Fontaine (non publié).

Théorème II.1.3. *Soit V une $\mathbf{Z}_p$-représentation ou une représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$.*

i) Si $y \in D(V)^{\psi=1}$, alors $(\dots, \iota_{\psi,n}(y), \dots) \in H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$.

ii) L'application $\mathrm{Log}^*_{V^*(1)} : D(V)^{\psi=1} \to H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$ ainsi définie est un isomorphisme.

Remarque II.1.4. i) Comme on le verra au chapitre IV, l'application $\mathrm{Log}^*_{V^*(1)}$ (ou plutôt son inverse que nous noterons $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}$) a un rapport assez étroit avec l'exponentielle duale de Bloch et Kato si V est une représentation de de Rham; c'est ce qui justifie le nom que nous lui avons donné.

ii) Il suffit de traiter le cas où V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation, le cas d'une représentation p-adique s'en déduisant en tensorisant par $\mathbf{Q}_p$. Dans toute la suite de ce chapitre, nous supposerons donc que V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation.

2. **Corestriction et (φ, Γ)-modules.** Le i) du théorème II.1.3 est une conséquence immédiate du lemme suivant.

Lemme II.2.1. *Si $n \geq 1$, soit*

$$\mathrm{T}_{\gamma,n} : H^1(C_{\psi,\gamma_n}(K_n, V)) \longrightarrow H^1(C_{\psi,\gamma_{n-1}}(K_{n-1}, V))$$

l'application induite par celle qui à $(x,y) \in Z^1(C_{\varphi,\gamma_n}(K_n,V))$ *associe* $(\frac{\gamma_n - 1}{\gamma_{n-1}-1}x, y) \in Z^1(C_{\varphi,\gamma_n}(K_{n-1},V))$. *Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} H^1(C_{\varphi,\gamma_n}(K_n,V)) \arrow[r, "\mathrm{T}_{\gamma,n}"] \arrow[d, "\iota_{\varphi,\gamma_n}"] & H^1(C_{\varphi,\gamma_{n-1}}(K_{n-1},V)) \arrow[d, "\iota_{\varphi,\gamma_{n-1}}"] \\ H^1(K_n,V) \arrow[r, "\mathrm{cor}_{K_n/K_{n-1}}"] & H^1(K_{n-1},V) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. Rappelons que si G est un groupe, M un G-module et H un sous-groupe d'indice fini de G, l'application de corestriction cor : $H^1(H,M) \to H^1(G,M)$ peut se décrire de la manière suivante. Soit $X \subset G$ un système de représentants de G/H et, si $g \in \mathcal{G}$, soit τ_g la permutation de X définie par $\tau_g(x)H = gxH$ si $x \in X$. Si $c \in H^1(H,M)$ et $h \to c_h$ est un cocycle représentant c, alors

$$g \to \sum_{x\in X} \tau_g(x)(c_{\tau_g(x)^{-1}gx})$$

est un cocycle sur G à valeurs dans M dont la classe dans $H^1(G,M)$ ne dépend pas du choix de X et est égale à $\mathrm{cor}(c)$.

De manière plus agréable, si N est un G-module contenant M tel que l'image de c dans $H^1(H,N)$ est triviale (i.e. tel qu'il existe $b \in N$ tel que l'on ait $c_h = (h-1)b$ quel que soit $h \in H$), alors $\mathrm{cor}(c)$ est la classe du cocycle

$$g \to (g-1)\Big(\sum_{x\in X} xb\Big).$$

Dans le cas particulier qui nous intéresse, on prend $G = \mathcal{G}_{K_{n-1}}$, $H = \mathcal{G}_{K_n}$ et, si $\tilde{\gamma}_{n-1}$ est un relèvement de γ_{n-1} dans $\mathcal{G}_{K_{n-1}}$, on pose $X = \{1, \tilde{\gamma}_{n-1}, \dots, \tilde{\gamma}_{n-1}^{p-1}\}$. Finalement, on prend $N = \mathrm{Frac}(\mathbf{Z}_p[[\mathcal{G}_{K_{n-1}}]]) \otimes_{\mathbf{Z}_p[[\mathcal{G}_{K_{n-1}}]]} (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)$ où $\mathrm{Frac}(\mathbf{Z}_p[[\mathcal{G}_{K_{n-1}}]])$ désigne l'anneau total des fractions de l'algèbre de groupe complétée $\mathbf{Z}_p[[\mathcal{G}_{K_{n-1}}]]$ de $\mathcal{G}_{K_{n-1}}$. Si $(x,y) \in Z^1(C_{\varphi,\gamma_n}(K_n,V))$, et si $b \in \mathbf{A} \otimes T$, le cocycle $c_{x,y}$ est donné par la formule $c_{x,y}(\sigma) = (\sigma - 1)c$, où $c = \frac{y}{\tilde{\gamma}_n - 1} - b \in N$. Il résulte de la discussion précédente que $\mathrm{cor}_{K_n/K_{n-1}}(\iota_{\varphi,\gamma_n}(x,y))$ est représenté par le cocycle

$$\sigma \to (\sigma-1)\Big(\sum_{i=0}^{p-1} \tilde{\gamma}_{n-1}^i c\Big) = (\sigma-1)\Big(\frac{y}{\tilde{\gamma}_{n-1}-1} - \sum_{i=0}^{p-1} \tilde{\gamma}_{n-1}^i b\Big)$$

et comme

$$(\varphi-1)\Big(\sum_{i=0}^{p-1} \tilde{\gamma}_{n-1}^i b\Big) = \sum_{i=0}^{p-1} \tilde{\gamma}_{n-1}^i((\varphi-1)b) = \frac{\tilde{\gamma}_{n-1}^p - 1}{\tilde{\gamma}_{n-1}-1}x = \frac{\gamma_n - 1}{\gamma_{n-1}-1}x,$$

on voit que ce cocycle n'est autre que $\iota_{\varphi,\gamma_{n-1}}(\mathrm{T}_{\gamma,n}(x,y))$, ce qui permet de conclure.

Remarque II.2.2. On peut aussi cacher ces calculs explicites dans le formalisme cohomologique en remarquant que, si $n \geq 1$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} C_{\varphi,\gamma_n}(K_n,V) : 0 \arrow[r] & D(V) \arrow[r] \arrow[d, "\frac{\gamma_n - 1}{\gamma_{n-1}-1}"] & D(V) \oplus D(V) \arrow[r] \arrow[d, "\frac{\gamma_n - 1}{\gamma_{n-1}-1} \oplus \mathrm{id}"] & D(V) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\ C_{\varphi,\gamma_{n-1}}(K_{n-1},V) : 0 \arrow[r] & D(V) \arrow[r] & D(V) \oplus D(V) \arrow[r] & D(V) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est commutatif et fonctoriel en V et induit donc un morphisme cohomologique de $H^*(K_n,\cdot)$ sur $H^*(K_{n-1},\cdot)$ qui coïncide de manière évidente avec la norme en degré 0 et donc avec la corestriction en degré supérieur.

3. **Interprétation des modules $D(V)^{\psi=1}$ et $\frac{D(V)}{\psi-1}$ en théorie d'Iwasawa.** Passons à la démonstration du ii) du théorème II.1.3. Le lemme II.2.1 implique en composant avec $\iota_{\varphi,\psi}$ que les applications $(\iota_{\psi,\gamma_n})_{n\in\mathbf{N}}$ induisent un isomorphisme de la limite projective des $H^1(C_{\psi,\gamma_n}(K_n,V))$ relativement aux applications $\mathrm{T}_{\gamma,n}$ sur $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$. D'autre part, le lemme I.5.5 implique, en passant à la limite projective, que l'on a la suite exacte

$$0\longrightarrow \varprojlim \frac{D(V)^{\psi=1}}{\gamma_n-1}\longrightarrow \varprojlim H^1(C_{\psi,\gamma_n}(K_n,V))\longrightarrow \varprojlim\Big(\frac{D(V)}{\psi-1}\Big)^{\Gamma_{K_n}},$$

la limite projective des $\frac{D(V)^{\psi=1}}{\gamma_n-1}$ étant prise pour les applications naturelles (i.e. induites par l'identité sur $D(V)^{\psi=1}$) et celle des $\big(\frac{D(V)}{\psi-1}\big)^{\gamma_n=1}$ relativement aux applications

$$\frac{\gamma_{n+1}-1}{\gamma_n-1}:\Big(\frac{D(V)}{\psi-1}\Big)^{\gamma_n=1}\to\Big(\frac{D(V)}{\psi-1}\Big)^{\gamma_{n-1}=1}.$$

Il s'agit donc de démontrer la proposition suivante.

Proposition II.3.1. *Si V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation de $\mathcal{G}_K$, alors*

i) L'application naturelle de $D(V)^{\psi=1}$ dans $\varprojlim \frac{D(V)^{\psi=1}}{\gamma_n-1}$ est un isomorphisme.

ii) $\varprojlim\big(\frac{D(V)}{\psi-1}\big)^{\gamma_n=1}=0$.

Démonstration. i) Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\varprojlim\frac{D(V)^{\psi=1}}{\gamma_n-1}$. La compacité de $D(V)^{\psi=1}$ [cf. proposition I.5.6] implique que la suite x_n admet une valeur d'adhérence $x\in D(V)^{\psi=1}$ et l'image de x dans $\varprojlim\frac{D(V)^{\psi=1}}{\gamma_n-1}$ est par construction $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. L'application naturelle de $D(V)^{\psi=1}$ dans $\varprojlim\frac{D(V)^{\psi=1}}{\gamma_n-1}$ est donc surjective.

La compacité de $D(V)^{\psi=1}$ et le fait que si $x\in D(V)$, alors $(\gamma_n-1)x$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ impliquent que si U est un ouvert de $D(V)$ stable par Γ, alors il existe $n_U\in\mathbf{N}$ tel que $(\gamma_n-1)D(V)^{\psi=1}\subset U$ si $n\geq n_U$. Ceci implique que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}}(\gamma_n-1)(D(V)^{\psi=1})=\{0\}$ et permet de montrer l'injectivité.

ii) $\frac{D(V)}{\psi-1}$ étant un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini [cf. proposition I.5.6], la suite des $\big(\frac{D(V)}{\psi-1}\big)^{\gamma_n=1}$ est stationnaire puisque croissante. On en déduit le fait qu'il existe $n_0\in\mathbf{N}$ tel que $\frac{\gamma_n-1}{\gamma_{n-1}-1}$ soit la multiplication par p sur $\big(\frac{D(V)}{\psi-1}\big)^{\gamma_n=1}$ si $n\geq n_0$, ce qui permet de conclure car $\frac{D(V)}{\psi-1}$ n'a pas d'élément p-divisible.

Remarque II.3.2. On a $H^2(K_n,V)\cong H^2(C_{\psi,\gamma_n}(K_n,V))=\frac{D(V)}{(\psi-1,\gamma_n-1)}$. On en déduit le fait que si V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation, alors $H^2_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ est la limite projective des $\frac{D(V)}{(\psi-1,\gamma_n-1)}$ et comme $\frac{D(V)}{\psi-1}$ est un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini sur lequel Γ_K agit continuement d'après le ii) du lemme I.7.3, l'application naturelle de $\frac{D(V)}{\psi-1}$ dans la limite projective des $\frac{D(V)}{(\psi-1,\gamma_n-1)}$ est un isomorphisme, ce qui prouve que $\frac{D(V)}{\psi-1}$ s'identifie fonctoriellement à $H^2_{\mathrm{Iw}}(K,V)$.

III. Représentations de de Rham et représentations surconvergentes

1. **Représentations de de Rham et représentations cristallines.** On pourra consulter [9] et [10] par exemple pour les faits rappelés dans ce paragraphe. On note $\mathcal{R}$ ou $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{E}}$. Soit $\mathbf{A}_{\inf} = W(\mathcal{R})$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathcal{R}$ et si $x \in \mathcal{R}$, soit $[x]$ son représentant de Teichmüller dans $\mathbf{A}_{\inf}$.

L'homomorphisme θ de $\mathbf{A}_{\inf}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ qui à $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n [x_n]$ associe $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n x_n^{(0)}$ est surjectif, son noyau est un idéal principal dont $\omega = \frac{[\varepsilon]-1}{[\varepsilon^{\frac{1}{p}}]-1} = \frac{\pi}{\varphi^{-1}(\pi)}$ est un générateur et $(\mathbf{A}_{\inf}, \theta)$ est l'épaississement p-adique universel de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$.

On prolonge θ en un morphisme de $\mathbf{B}_{\inf}^+ = \mathbf{A}_{\inf}[\frac{1}{p}]$ sur $\mathbf{C}_p$, on note $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ l'anneau $\varprojlim \mathbf{B}_{\inf}^+/(\ker\theta)^n$ et on prolonge θ par continuité en un morphisme de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ sur $\mathbf{C}_p$. Ceci fait de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $\ker\theta$ et de corps résiduel $\mathbf{C}_p$. L'action de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathbf{B}_{\inf}^+$ s'etend par continuité en une action continue de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. La série $\log[\varepsilon] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\pi^n$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ vers un élément que nous noterons t, qui est un générateur de $\ker\theta$, sur lequel $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit via la formule $\sigma(t) = \chi(\sigma)t$ et qui peut être vu comme un analogue p-adique de $2i\pi$.

On pose $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[t^{-1}]$, ce qui fait de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ un corps et on munit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ de la filtration décroissante définie par $\mathrm{Fil}^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = t^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Cette filtration est stable par l'action de $\mathcal{G}_K$.

Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Soit V une représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$. Le K-espace vectoriel $D_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathcal{G}_K}$ est de dimension inférieure ou égale à celle de V sur $\mathbf{Q}_p$. On dit que V est de de Rham s'il y a égalité. D'autre part, $D_{\mathrm{dR}}(V)$ est muni de la filtration induite par celle de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$; c'est une filtration décroissante et on a $\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V) = D_{\mathrm{dR}}(V)$ si $i \ll 0$ et $\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V) = \{0\}$ si $i \gg 0$.

Soit $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+$ l'ensemble des $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ tels qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{B}_{\inf}^+$ tendant vers 0 telle que l'on ait $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\omega^n}{n!}$. Alors $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+$ est un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ stable par $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ contenant t et l'action de φ sur $\mathbf{B}_{\inf}^+$ s'étend par continuité en une action sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+$. On a $\varphi(t) = pt$ et on note $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ le sous-anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+[\frac{1}{t}]$ de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$.

Le $K \cap \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$-espace vectoriel $D_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes V)^{\mathcal{G}_K}$ est aussi de dimension inférieure ou égale à celle de V sur $\mathbf{Q}_p$ et on dit que V est cristalline s'il y a égalité. L'action de φ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ commutant à celle de $\mathcal{G}_K$, ceci munit naturellement $D_{\mathrm{cris}}(V)$ d'une action semi-linéaire (relativement à la structure de $K \cap \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$-espace vectoriel) de φ.

Si V est une représentation de de Rham (resp. cristalline) et $k \in \mathbf{Z}$, il en est de même de $V(k)$ et on a $D_{\mathrm{dR}}(V(k)) = t^{-k}D_{\mathrm{dR}}(V)$ (resp. $D_{\mathrm{cris}}(V(k)) = t^{-k}D_{\mathrm{cris}}(V)$).

2. **Éléments surconvergents.** Tout élément x de $\widetilde{\mathbf{B}}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{k\gg-\infty} p^k[x_k]$, où les x_k sont des éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}$ et la série converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ si et seulement si la série $\sum_{k\gg-\infty} p^k x_k^{(0)}$ converge dans $\mathbf{C}_p$, c'est-à-dire si et seulement si $k + v_{\mathbf{E}}(x_k)$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$. Plus généralement, si $n \in \mathbf{N}$, la série définissant $\varphi^{-n}(x)$ converge si et seulement si $k + p^{-n}v_{\mathbf{E}}(x_k)$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$.

Un élément x de $\widetilde{\mathbf{B}}$ pour lequel il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que la série définissant $\varphi^{-n}(x)$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ sera dit surconvergent. On note $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ l'ensemble des éléments surconvergents de $\widetilde{\mathbf{B}}$; c'est un sous-corps de $\widetilde{\mathbf{B}}$ stable par φ et $\mathcal{G}_K$. Si $n \in \mathbf{N}$, on note $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n}$ l'ensemble des $x \in \widetilde{\mathbf{B}}$ tels que $\varphi^{-n}(x)$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$; c'est un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{B}}$ stable par $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et on a $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n}$. D'autre part, $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n}$ si et seulement si $\varphi(x) \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n+1}$.

On note $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,n}$ l'anneau des éléments $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n} \cap \widetilde{\mathbf{A}}$ tels que $k + p^{-n}v_{\mathbf{E}}(x_k) \geq 0$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$ et on a $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n} = \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,n}[\frac{1}{p}]$.

On définit un sous-corps $\mathbf{B}^\dagger$ de $\mathbf{B}$ stable par φ et $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et, si $n \in \mathbf{N}$, des sous-anneaux $\mathbf{A}^{\dagger,n}$ et $\mathbf{B}^{\dagger,n}$ de $\mathbf{B}$ stables par $\mathcal{G}_K$ en posant $\mathbf{B}^\dagger = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$, $\mathbf{A}^{\dagger,n} = \mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,n}$ et $\mathbf{B}^{\dagger,n} = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n}$. Par construction, $\varphi^{-n}(\mathbf{B}^{\dagger,n})$ s'identifie naturellement à un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Finalement, si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on pose $\mathbf{B}_K^\dagger = (\mathbf{B}^\dagger)^{\mathcal{H}_K}$, $\mathbf{A}_K^{\dagger,n} = (\mathbf{A}^\dagger)^{\mathcal{H}_K}$ et $\mathbf{B}_K^{\dagger,n} = (\mathbf{B}^{\dagger,n})^{\mathcal{H}_K}$.

Proposition III.2.1. *i) Si K est une extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ et si $n \geq 1$, un élément x de $\mathbf{A}_K$ appartient à $\mathbf{A}_K^{\dagger,n}$ si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $x = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\pi^k$, où les a_k sont des éléments de $\mathcal{O}_K$ tels que $v_p(a_k) + \frac{k}{(p-1)p^{n-1}} \geq 0$ et tend vers $+\infty$ quand k tend vers $-\infty$.*

ii) Si $n \geq 2$, un élément x de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ appartient à $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}^{\dagger,n}$ si et seulement si $w_k(x) - k(p-1)(p^{n-1}-1) \leq 0$ et tend vers $-\infty$ quand k tend vers $+\infty$.

iii) Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, alors $\mathbf{B}_K^\dagger$ est une extension de $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}^\dagger$ de degré $[\mathbf{B}_K : \mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}] = [K_\infty : \mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})]$ et il existe $a(K) \in \mathbf{N}$ tel que si $n \geq a(K)$, alors $\varphi^{-n}(\mathbf{B}_K^{\dagger,n}) \subset K_n[[t]]$.

Démonstration. Le i) est démontré dans [3] (c'est une réécriture du (iii) de la proposition II.2.1 de [3], compte-tenu de ce que l'anneau noté $\mathbf{A}^{\dagger,n}$ dans cet article correspond à l'anneau $\mathbf{A}_{r^-}^\dagger$ de [3] avec $r = (p-1)p^{n-1}$ d'après la remarque II.1.1 de [3]). Le ii) est une conséquence du i) et de la construction des applications w_k (cf. chapitre I, §6). Remarquons de plus que l'anneau A utilisé pour la construction de ces applications est l'adhérence de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}^{\dagger,1}$ dans $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$. Le iii) est démontré dans [2] et partiellement dans [3], proposition II.4.1, mais comme [2] n'est pas facilement accessible, nous allons en donner une démonstration complète.

Dans le cas où K est non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$, on peut déduire le iii) du i) en utilisant le fait que $K_n[[t]]$ est fermé dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et la formule

$$\varphi^{-n}(\pi) = \varphi^{-n}([\varepsilon] - 1) = [\varepsilon^{p^{-n}}] - 1 = \varepsilon^{(n)}e^{\frac{t}{p^n}} - 1 \in K_n[[t]].$$

Dans le cas général, soit $F = K \cap \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ et soit $e = [K_\infty : F_\infty]$. D'après la remarque I.1.2, il existe $\omega = (\omega^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in \varprojlim \mathcal{O}_{K_n}$ tel que $\omega^{(n)}$ soit une uniformisante de $\mathcal{O}_{K_n}$ si n est assez grand et $\overline{\pi}_K = \iota_K(\omega)$ est alors une uniformisante de $\mathbf{E}_K$ qui est une extension totalement ramifiée de degré e de $\mathbf{E}_F$. Soit $\overline{P}(X) = X^e + \overline{a}_{e-1}X^{e-1} + \cdots + \overline{a}_0 \in \mathbf{E}_F[X]$ le polynôme minimal de $\overline{\pi}_K$ sur $\mathbf{E}_F$ et soit $\delta = v_{\mathbf{E}}(\overline{P}'(\overline{\pi}_K))$. Si $0 \leq i \leq e-1$, soit $a_i \in \mathcal{O}_F[[\pi]] \subset \mathbf{A}_F$ dont la réduction modulo p est $\overline{a}_i$ et soit $P(X) = X^e + a_{e-1}X^{e-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{A}_F[X]$. Le lemme de Hensel (ou l'algorithme de Newton) montre que l'équation $P(X) = 0$ a une unique solution π_K dans $\mathbf{A}_K$ dont la réduction modulo p est $\overline{\pi}_K$ et que cette solution (vue comme élément de

$\widetilde{\mathbf{A}}$) peut s'écrire sous la forme

$$\pi_K = [\overline{\pi}_K] + \sum_{i=1}^{+\infty} p^i[\alpha_i], \tag{III.2.2}$$

où les α_i sont des éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}$ vérifiant $v_{\mathbf{E}}(\alpha_i) \geq -i\delta$. En particulier, $\pi_K \in \mathbf{A}_K^{\dagger,n}$ si $p^n > \delta$, ce qui permet de montrer que l'on a $\mathbf{A}_K^{\dagger,n} = \mathbf{A}_F^{\dagger,n}[\pi_K]$ si $p^n > \delta$. Pour terminer la démonstration du iii) dans le cas général, il suffit donc de prouver que si n est assez grand, alors $\pi_{K,n} = \varphi^{-n}(\pi_K) \in K_n[[t]]$. Soit P_n (resp. Q_n) le polynôme obtenu en appliquant $\theta \circ \varphi^{-n}$ (resp. φ^{-n}) à chacun des coefficients de P; c'est un polynôme à coefficients dans $\mathcal{O}_{F_n}$ (resp. $F_n[[t]]$) dont $\theta(\pi_{K,n})$ (resp. $\pi_{K,n}$) est une racine. D'autre part, par définition de l'application ι_K (cf. proposition I.1.1), on a $v_p(\omega^{(n)} - \overline{\pi}_K^{(n)}) \geq \frac{1}{p}$ si n est assez grand et la formule (III.2.2) montre que $v_p(\theta(\pi_{K,n}) - \overline{\pi}_K^{(n)}) \geq (1 - \frac{\delta}{p^n})$ et donc que $v_p(P_n(\omega^{(n)})) \geq \frac{1}{p}$ si n est assez grand. Le même genre de calcul montre que $v_p(P_n'(\omega^{(n)})) = \frac{1}{p^n} v_{\mathbf{E}}(\overline{P}'(\overline{\pi}_K))$ si n est assez grand et donc que l'on a $v_p(P_n(\omega^{(n)})) > 2v_p(P_n'(\omega^{(n)}))$ si n est assez grand. Le lemme de Hensel permet alors de montrer que l'équation $P_n(X) = 0$ a une unique solution dans $\mathbf{C}_p$ proche de $\omega^{(n)}$ et que cette solution appartient à $\mathcal{O}_{K_n}$ puisque $\omega^{(n)}$ et les coefficients de P_n y appartiennent. On en déduit l'appartenance de $\theta(\pi_{K,n})$ à K_n. Si on utilise à nouveau le lemme de Hensel, on montre que Q_n a une unique solution dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ dont l'image par θ est $\theta(\pi_{K,n})$ et que cette solution appartient à $K_n[[t]]$, ce qui permet de conclure.

On munit $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}$ de l'opérateur différentiel ∇ défini par continuité et les règles habituelles de dérivation à partir de la formule $\nabla\pi = 1 + \pi$. On a donc $\nabla = [\varepsilon]\frac{d}{d\pi}$ "=" $\frac{d}{dt}$, la dernière "égalité" venant de ce que l'on a $t = \log(1+\pi)$. Il faut tout de même faire attention au fait que $t \notin \mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}$. Cette dérivation s'étend de manière unique à l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}$ puis par continuité, en une dérivation ∇ de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{B}$.

Lemme III.2.3. *Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, il existe $m(K) \in \mathbf{N}$ tel que, si $n \geq m(K)$ et $x \in \mathbf{B}_K^{\dagger,n}$, alors*
i) $\nabla x \in \mathbf{B}_K^{\dagger,n}$.
ii) $\varphi^{-n}(\nabla x) = p^n \frac{d}{dt}(\varphi^{-n}(x))$.

Démonstration. Si $K = \mathbf{Q}_p$, un calcul explicite utilisant le i) de la proposition précédente montre que l'on peut prendre $n(K) = 1$. Dans le cas général, soit α un générateur de $\mathbf{B}_K^\dagger$ sur $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}^\dagger$ et P son polynôme minimal. L'identité

$$0 = \nabla(P(\alpha)) = P'(\alpha)\nabla\alpha + \nabla P(\alpha),$$

où ∇P est le polynôme obtenu en appliquant ∇ à chacun des coefficients de P, montre que $\nabla\alpha = -\frac{\nabla P(\alpha)}{P'(\alpha)} \in \mathbf{B}_K^\dagger$. On peut alors prendre pour $m(K)$ n'importe quel entier m tel que $\mathbf{B}_K^{\dagger,m}$ contienne $\nabla\alpha$ et α.

Pour démontrer le ii), il suffit alors de constater que $\varphi^{-n} \circ \nabla$ et $p^n\frac{d}{dt} \circ \varphi^{-n}$ sont deux dérivations continues de $\mathbf{B}_K^{\dagger,n}$ coïncidant sur $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}^{\dagger,n}$ car

$$\varphi^{-n} \circ \nabla([\varepsilon]) = \varphi^{-n}([\varepsilon]) = \varepsilon^{(n)}\exp(p^{-n}t),$$

$$p^n\frac{d}{dt} \circ \varphi^{-n}([\varepsilon]) = p^n\frac{d}{dt}(\varepsilon^{(n)}\exp(p^{-n}t)) = \varepsilon^{(n)}\exp(p^{-n}t).$$

3. **Généralités sur les représentations surconvergentes.** Une représentation surconvergente est une représentation dont le (φ, Γ)-module est engendré par des éléments surconvergents. De manière précise, on a la définition suivante.

Définition III.3.1. Si V est une représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$, on pose

$$D^\dagger(V) = (\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_K} \quad \text{et} \quad D^{\dagger,n}(V) = (\mathbf{B}^{\dagger,n} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_K} \text{ si } n \in \mathbf{N}.$$

On a $\dim_{\mathbf{B}_K^\dagger} D^\dagger(V) \leq \dim_{\mathbf{Q}_p} V$ et on dit que V est *surconvergente* si on a égalité.

Les représentations surconvergentes sont étudiées en détails dans [2] et [3] et la proposition suivante rassemble les résultats de ces deux articles dont nous aurons besoin pour la suite.

Proposition III.3.2. *i) Toute représentation de $\mathcal{G}_K$ est surconvergente.*

ii) Il existe $n_1(V)$ tel que $D(V)^{\psi=1} \subset D^{\dagger,n_1(V)}(V)$.

iii) Si V est surconvergente et $n \in \mathbf{N}$, alors $\gamma_n - 1$ admet un inverse continu sur $D^\dagger(V)^{\psi=0}$. Plus précisément, il existe $n_2(V)$ tel que si $n \geq n_2(V)$, alors

$$(\gamma_n - 1)^{-1}(D^{\dagger,n}(V)^{\psi=0}) \subset D^{\dagger,n+1}(V)^{\psi=0}.$$

Démonstration. Le i) est le résultat principal de [3] (cf. corollaire III.5.2); le ii) est démontré dans [2] et peut aussi se déduire du lemme I.6.4 et du ii) de la proposition III.2.1 de la manière suivante.

Soit T un $\mathbf{Z}_p$-réseau de V stable par $\mathcal{G}_K$. Puisque V est supposée surconvergente, on peut choisir la base $e_1, \dots, e_d$ de $D(T)$ formée d'éléments surconvergents et la matrice Φ est alors elle aussi formée d'éléments surconvergents. Soit $n \geq 2$ tel que $e_i \in D^{\dagger,n}(T)$ si $1 \leq i \leq d$ et les coefficients de Φ appartiennent à $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}^{\dagger,n}$. La suite de terme général $w_k(\Phi) - k(p-1)(p^{n-1}-1)$ tend donc vers $-\infty$ quand k tend vers $+\infty$ et le lemme I.6.4 appliqué à $x = 0$ montre que les coordonnées $y_1, \dots, y_d$ de y dans la base $e_1, \dots, e_d$ sont telles que $w_k(y_i) - kp(p^{n-1}-1)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et sont donc éléments de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}^{\dagger,n+1}$. Ceci permet de conclure.

Le iii) peut se déduire de la proposition II.5.4 de [3]. D'après cette proposition, il existe $m \geq 2$, $n_2(V) \geq m$ et une base $e_1, \dots, e_d$ de $D(T)$ sur $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ constituée d'éléments de $D^{\dagger,n_2(V)}(T)$ tels que si $n \geq n_2(V)$ et D_n est le sous-$\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}^{\dagger,n}$-module de $D^{\dagger,n}(V)$ engendré par $e_1, \dots, e_d$, alors $\gamma_n - 1$ induit une bijection de $\varphi(\pi)^a D_n^{\psi=0}$ sur $\varphi(\pi)^{a+p^{m-1}} D_n^{\psi=0}$ quel que soit $a \in \mathbf{Z}$.

Si $r \in \mathbf{N}$, soient $a_{r,k}$ pour $k \in \mathbf{N}$ les éléments de $\mathbf{Q}$ définis par

$$\frac{1}{X^{p^r} - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{r,k}(X-1)^{-k}.$$

Une décomposition en éléments simples fournit la formule

$$a_{r,k} = \frac{1}{p^r} \sum_{\zeta^{p^r}=1} \zeta^{-k}(1-\zeta)^{k-1}$$

et comme $v_p(\zeta - 1) \geq \frac{1}{(p-1)p^{r-1}}$, on en déduit la minoration $v_p(a_{r,k}) \geq -r - 1 + [\frac{k}{(p-1)p^{r-1}}]$. Un petit calcul montre alors que si l'on écrit k sous la forme $b(p-1)p^r + s$ avec $0 \leq s < (p-1)p^r$ et que l'on pose $n = m + r$, alors $a_{r,k}\varphi(\pi)^{-kp^{m-1}} \in p^{(p-1)b}\varphi(\pi)^{-sp^{m-1}} \mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}^{\dagger,n+1}$. On en déduit en particulier le fait que si $x \in D_n^{\psi=0}$, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{r,k}(\gamma_m-1)^{-k}x$ converge dans $D^{\dagger,n+1}(V)$ vers un élément y de $D(V)^{\psi=0}$ (puisque tous les termes de la série sont tués par ψ) tel que l'on ait

$$(\gamma_n-1)y=(\gamma_m^{p^r}-1)y=(\gamma_m^{p^r}-1)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_{r,k}(\gamma_m-1)^{-k}\right)x=x,$$

par définition des $a_{r,k}$. On a donc l'inclusion $(\gamma_n-1)^{-1}\big(D_n^{\psi=0}\big)\subset D^{\dagger,n+1}(V)$ et pour conclure, il suffit de constater que l'on a $D^{\dagger,n}(V)=\mathbf{Q}_p\otimes D_n$ et donc $(D^{\dagger,n}(V))^{\psi=0}=\mathbf{Q}_p\otimes D_n^{\psi=0}$.

IV. Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham

1. **L'application exponentielle de Bloch-Kato et sa duale.** Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et V une représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$. Tensorisant la suite exacte

$$0\to\mathbf{Q}_p\to\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}\to\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\to 0$$

avec V et prenant la suite exacte de cohomologie associée, on obtient la suite exacte

$$0\to V^{\mathcal{G}_K}\to D_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}(V)\to((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+})\otimes V)^{\mathcal{G}_K}\to H^1_e(K,V)\to 0,$$

où l'on a noté $H^1_e(K,V)$ le noyau de l'application naturelle de $H^1(K,V)$ dans $H^1(K,\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}\otimes V)$. On en déduit une application de $D_{\mathrm{dR}}(V)$ dans $H^1(K,V)$ appelée exponentielle de Bloch-Kato et notée $\exp_V$. Cette application se factorise à travers $D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0D_{\mathrm{dR}}(V)$ et son image est incluse dans $H^1_e(K,V)$. D'autre part, si V est de de Rham, on a $((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+})\otimes V)^{\mathcal{G}_K}=D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0D_{\mathrm{dR}}(V)$ et l'image de $\exp_V$ est $H^1_e(K,V)$ tout entier (cf. [1], Lemma 3.8.1). Finalement, si V est de de Rham et $k\gg 0$, alors $\exp_{V(k)}$ est un isomorphisme de $D_{\mathrm{dR}}(V(k))$ sur $H^1(K,V(k))$.

Le choix de t nous fournit un isomorphisme entre $D_{\mathrm{dR}}(\mathbf{Q}_p(1))=t^{-1}K$ et K. Si V est une représentation de $\mathcal{G}_K$, l'accouplement $[\ ,\ ]_{D_{\mathrm{dR}}(V)}$ obtenu en composant les applications

$$D_{\mathrm{dR}}(V)\otimes D_{\mathrm{dR}}(V^*(1))\cong D_{\mathrm{dR}}(V\otimes V^*(1))\to D_{\mathrm{dR}}(\mathbf{Q}_p(1))\cong K\xrightarrow{\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}_p}}\mathbf{Q}_p$$

est non dégénéré, ce qui fait que $D_{\mathrm{dR}}(V^*(1))$ s'identifie naturellement au dual de $D_{\mathrm{dR}}(V)$. De même, $H^1(K,V^*(1))$ s'identifie naturellement, grâce au cup-produit

$$H^1(K,V)\times H^1(K,V^*(1))\to H^2(K,\mathbf{Q}_p(1))=\mathbf{Q}_p,$$

au dual de $H^1(K,V)$. Ceci permet de voir l'application $\exp^*_{V^*(1)}$ transposée de l'application $\exp_{V^*(1)}:D_{\mathrm{dR}}(V^*(1))\to H^1(K,V^*(1))$ comme une application de $H^1(K,V)$ dans $D_{\mathrm{dR}}(V)$; son image est incluse dans $\mathrm{Fil}^0D_{\mathrm{dR}}(V)$. Si V est de de Rham et $k\gg 0$, l'application $\exp^*_{V^*(1+k)}$ est un isomorphisme de $H^1(K,V(-k))$ sur $D_{\mathrm{dR}}(V(-k))$.

Cette construction de l'application $\exp^*$ n'est pas très commode pour les calculs, mais on peut utiliser un théorème de Kato [12] pour obtenir des formules plus explicites (cf. proposition IV.1.2 ci-dessous dont on peut trouver la démonstration dans [5]). Pour formuler le résultat, nous aurons besoin d'introduire un certain nombre d'opérateurs sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{H}_K}$.

Si $x\in K_\infty$ et $n\in\mathbf{N}$, alors $\frac{1}{p^m}\mathrm{Tr}_{K_m/K_n}(x)$ ne dépend pas du choix de l'entier $m\geq n+1$ tel que x appartienne à K_m. On note T_n l'application $\mathbf{Q}_p$-linéaire de

K_∞ dans K_n ainsi définie. Si $n \geq 1$ et $x \in K_n$, alors $\mathrm{T}_n(x) = p^{-n}x$. Les T_n sont reliés entre eux par la formule

$$\mathrm{T}_m = \mathrm{Tr}_{K_n/K_m} \circ \mathrm{T}_n \quad \text{si } n \geq m.$$

On note encore T_n l'application de $K_\infty((t))$ dans $K_n((t))$ définie par $\mathrm{T}_n(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{T}_n(a_k)t^k$.

Proposition IV.1.1. *i) $K_\infty((t))$ est dense dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{H}_K}$ et T_n s'étend par continuité en une application $\mathbf{Q}_p$-linéaire de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{H}_K}$ dans $K_n((t))$.*

ii) Si $F \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{H}_K}$, alors $\lim_{n\to+\infty} p^n\mathrm{T}_n(F) = F$.

Démonstration. ([5], proposition V.4.1.)

On définit de la même manière des applications $\mathrm{pr}_{K_n} : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{H}_K} \to K_n((t))$ par la formule $\mathrm{pr}_{K_n}(x) = \frac{1}{[K_m:K_n]}\mathrm{Tr}_{K_m/K_n}(x)$ si $x \in K_\infty$ et $m \geq n$ est tel que $x \in K_m$ et il existe $a'(K) \geq 1$ tel que l'on ait $p^n\mathrm{T}_n = \mathrm{pr}_{K_n}$ si $n \geq a'(K)$. Le ii) de la proposition précédente se traduit donc par la formule $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{pr}_{K_n}(x) = x$ si $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{H}_K}$.

Si V est une représentation de de Rham, l'application naturelle de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{H}_K} \otimes_K D_{\mathrm{dR}}(V)$ dans $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_K}$ est un isomorphisme et on étend les applications T_n et pr_{K_n} pour $n \in \mathbf{N}$ par linéarité à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{H}_K} \otimes D_{\mathrm{dR}}(V)$. D'autre part, si $F \in K_\infty((t)) \otimes D_{\mathrm{dR}}(V)$, alors F s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k\gg-\infty} t^k d_k$ avec $d_k \in K_\infty \otimes D_{\mathrm{dR}}(V)$ et on note $\partial_{V(-k)}(F)$ l'élément $t^k d_k$ de $K_\infty \otimes D_{\mathrm{dR}}(V(-k))$.

Proposition IV.1.2. *Soient V une représentation de de Rham, $m \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{Z}$ deux entiers. Soit $c \in H^1(K_m, V(-k))$ et $\tau \to c_\tau$ un cocycle sur Γ_{K_m} à valeurs dans $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V(-k))^{\mathcal{H}_K}$ ayant même image que c dans $H^1(K_m, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V(-k))$, alors*

$$\exp^*_{V^*(1+k)}(c) = \partial_{V(-k)} \circ \mathrm{pr}_{K_m}\left(\frac{1}{\log_p \chi(\gamma)} c_\gamma\right)$$

quel que soit $\gamma \in \Gamma_m$ tel que $\log_p \chi(\gamma) \neq 0$.

Remarque IV.1.3. La nullité de $H^1(K_\infty, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V(-k))$ (cf. [5], (i) du théorème IV.3.1) entraine le fait que l'application d'inflation de $H^1(\Gamma_{K_m}, (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V(-k))^{\mathcal{H}_K})$ dans $H^1(K_m, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V(-k))$ est un isomorphisme et donc que l'on peut effectivement trouver le cocycle $\tau \to c_\tau$ sur Γ_{K_m} dont on a besoin pour pouvoir utiliser la proposition précédente.

2. **La loi de réciprocité explicite.** Soient V une représentation de de Rham de $\mathcal{G}_K$ et $n(V) = \sup(n_1(V), n_2(V))$ (cf. proposition III.3.2). Si $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$, alors $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}(\mu) \in D(V)^{\psi=1}$. D'autre part, $D(V)^{\psi=1} \subset D^{\dagger, n(V)}(V)$ d'après le ii) de la proposition III.3.2. Ceci permet, si $n \geq n(V)$ de voir $\varphi^{-n}(\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}(\mu))$ comme un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V$. Comme $\varphi^{-n}(\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}(\mu))$ est un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V$ fixe par $\mathcal{H}_K$, on peut regarder son image par les applications T_m définies au §1.

Théorème IV.2.1. *Soient V une représentation de de Rham de $\mathcal{G}_K$ et $m \in \mathbf{N}$.*

i) Si $n \geq \sup(m, n(V))$ et $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$, alors $\mathrm{T}_m(\varphi^{-n}(\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}(\mu)))$ est un élément de $K_m((t)) \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ indépendant de n; il sera noté $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1),K_m}(\mu)$.

ii) Si $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$, alors

$$\mathrm{Exp}^*_{V^*(1),K_m}(\mu) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \exp^*_{V^*(1+k)}\Big(\int_{\Gamma_{K_m}} \chi(x)^{-k}\mu\Big).$$

iii) Il existe $m(V) \geq n(V)$ tel que si $m \geq m(V)$ et $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$, alors $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1),K_m}(\mu) = p^{-m}\varphi^{-m}(\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}(\mu))$.

Remarque IV.2.2. L'image de $H^1(K_m, V(-k))$ par $\exp^*_{V(k+1)}$ est incluse dans $\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}(V(-k)) = \mathrm{Fil}^0(t^k D_{\mathrm{dR}}(V))$ et est donc nulle si $k \ll 0$. La série dans le membre de droite du ii) est donc bien convergente dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes D_{\mathrm{dR}}(V)$.

Démonstration. Compte-tenu de ce que $\mathrm{T}_r = \mathrm{Tr}_{K_m/K_r} \circ \mathrm{T}_m$ si $r \leq m$ et de ce que si $L_1 \subset L_2$ sont deux extensions finie de K, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(L_2,V) & \xrightarrow{\exp^*_{V^*(1)}} & L_2 \otimes D_{\mathrm{dR}}(V) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{cor}_{L_2/L_1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}_{L_2/L_1}\otimes \mathrm{id}} \\ H^1(L_2,V) & \xrightarrow{\exp^*_{V^*(1)}} & L_2 \otimes D_{\mathrm{dR}}(V) \end{array}$$

est commutatif, pour démontrer les points i) et ii), il suffit de le faire pour m assez grand. On peut donc en particulier supposer $m \geq n(V)+1$, $\mathrm{pr}_{K_m} = p^m \mathrm{T}_m$ et $\ell_{K_m}(\gamma_m) = \frac{\log \chi(\gamma_m)}{p^m}$.

Notons y l'élément $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}(\mu)$ de $D(V)^{\psi=1}$ et, si $i \in \mathbf{Z}$, notons $y(i)$ l'image de y dans $D(V(i))^{\psi=1} = D(V)^{\psi=1}$ (les deux modules sont égaux; il n'y a que l'action de Γ_K qui change). Par construction de l'application $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}$ ou plutôt de son inverse, $\int_{\Gamma_{K_m}} \chi(x)^{-k}\mu$ est représentée par le cocycle

$$\sigma \to c'_\sigma = \ell_{K_m}(\gamma_m)\Big(\frac{\sigma-1}{\gamma_m-1} y(-k) - (\sigma-1)b\Big),$$

où $b \in \mathbf{A} \otimes V$ est une solution de l'équation $(\varphi-1)b = (\gamma_m-1)^{-1}((\varphi-1)y(-k))$.

Par définition de $n(V)$, on a $y \in D^{\dagger,n(V)}(V) \subset D^{\dagger,m-1}(V)$ et donc $(\varphi-1)y \in D^{\dagger,m}(V)^{\psi=0}$, ce qui implique $(\gamma_m-1)^{-1}(\varphi-1)y(-k) \in D^{\dagger,m+1}(V)$ d'après le iii) de la proposition III.3.2 et le même genre de majorations que dans la démonstration du lemme I.6.4 permet de montrer que ceci implique $b \in \mathbf{A}^{\dagger,m} \otimes V$. Comme on a supposé $n \geq \sup(m, n(V))$, on peut donc voir $\varphi^{-n}(b)$ et $\varphi^{-n}(y)$ comme des éléments de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes V$ et $c'_\sigma = \varphi^{-n}(c'_\sigma)$ comme un cocycle à valeurs dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V$ qui diffère du cocycle

$$\sigma \to c_\sigma = \frac{\log \chi(\gamma_m)}{p^m} \frac{\sigma-1}{\gamma_m-1} \varphi^{-n}(y(-k))$$

par le cobord $\sigma \to \frac{\log \chi(\gamma_m)}{p^m}(\sigma-1)\varphi^{-n}(b)$. Comme y est fixe par $\mathcal{H}_K$, le cocycle $\sigma \to c_\sigma$ est à valeurs dans $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathcal{H}_K}$ ce qui permet d'utiliser la formule de Kato pour calculer son image par l'application exponentielle duale et on obtient

$$\begin{aligned} \exp^*_{V^*(1+k)}\Big(\int_{\Gamma_{K_m}} \chi(x)^{-k}\mu\Big) &= \frac{1}{\log \chi(\gamma_m)} \partial_{V(-k)}(\mathrm{pr}_{K_m}(c_{\gamma_m})) \\ &= \frac{1}{p^m} \partial_{V(-k)}(\mathrm{pr}_{K_m}(\varphi^{-n}(y))) \end{aligned}$$

et comme $\frac{1}{p^m}\mathrm{pr}_{K_m} = \mathrm{T}_m$ et $\mathrm{T}_m(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \partial_{V(-k)}(\mathrm{T}_m(x))$ si $x \in (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathcal{H}_K}$, on en déduit le i) et le ii).

Passons à la démonstration du iii); il s'agit de démontrer que si m est assez grand, alors $\varphi^{-m}(\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}(\mu)) \in K_m((t)) \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme IV.2.3. *Soit d un entier ≥ 1. Si $U \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{H}_K})$ est tel qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $U^{-1}\gamma(U) \in \mathrm{GL}_d(K_n((t)))$, alors il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $U \in \mathrm{GL}_d(K_m((t)))$.*

Démonstration. Soit $A = U^{-1}\gamma(U)$. Si $m \geq n$, soit $U_m = \mathrm{pr}_{K_m}(U)$. Utilisant le fait que pr_{K_m} est $K_n((t))$-linéaire si $m \geq n$, on obtient, en appliquant pr_{K_m} à l'identité $UA = \gamma(A)$, la relation $U_m A = \gamma(U_m)$. D'autre part, comme $\lim_{m\to+\infty} U_m = U$, il existe $m \geq n$ tel que U_m soit inversible et éliminant A entre les identités ci-dessus, on obtient le fait que UU_m^{-1} est fixe par γ et donc appartient à $\mathrm{GL}_d(K)$. On en déduit l'appartenance de U à $\mathrm{GL}_d(K_m((t)))$, ce qu'il fallait démontrer.

Soient $e_1, \dots, e_d$ une base de $D^{\dagger,n(V)}(V)$ sur $\mathbf{B}_K^{\dagger,n(V)}$ constituée d'éléments de $D(V)^{\psi=1}$ et $f_1, \dots, f_d$ une base de $D_{\mathrm{dR}}(V)$ sur K. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_K^{\dagger})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_K^{\dagger})$ et, si $m \geq n(V)$, $C^{(m)} = (c_{i,j}^{(m)}) \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{H}_K})$ les matrices définies par

$$\gamma(e_j) = \sum_{i=1}^{d} e_i, \quad \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{d} b_{i,j} e_i \quad \text{et} \quad \varphi^{-m}(e_j) = \sum_{i=1}^{d} c_{i,j}^{(m)} f_i.$$

Les relations $\gamma \circ \varphi^{-m} = \varphi^{-m} \circ \gamma$ et $\varphi^{-m} = \varphi^{-(m+1)} \circ \varphi$, se traduisent, en tenant compte du fait que $f_1, \dots, f_d$ sont fixes par γ, par les relations matricielles

$$\gamma(C^{(m)}) = C^{(m)}\varphi^{-m}(A) \quad \text{et} \quad C^{(m+1)} = C^{(m)}\varphi^{-(m+1)}(C^{-1}).$$

Il existe $n_0 \geq n(V)$ tel que A et B appartiennent à $\mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_K^{\dagger,n_0})$. Comme il existe $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\varphi^{-m}(\mathbf{B}_K^{\dagger,m}) \subset K_m[[t]]$, si $m \geq m_0$, on tire de la première de ces relations et du lemme IV.2.3, le fait qu'il existe $m(V) \geq \sup(n_0, m_0) = m_1$ tel que $C^{(m_1)} \in \mathrm{GL}_d(K_{m(V)}((t)))$, ce qui implique, compte-tenu de la seconde relation, que $C^{(m)} \in \mathrm{GL}_d(K_m((t)))$ quel que soit $m \geq m(V)$. Comme tout élément x de $D(V)^{\psi=1}$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^d x_i e_i$ avec $x_i \in \mathbf{B}_K^{\dagger,n(V)}$ et comme $\varphi^{-m}(\mathbf{B}_K^{\dagger,n(V)}) \subset K_m[[t]]$ si $m \geq m(V)$ d'après le choix de $m(V)$, on déduit de l'appartenance de $C^{(m)}$ à $\mathrm{GL}_d(K_m((t)))$ si $m \geq m(V)$, l'inclusion $\varphi^{-m}(D(V)^{\psi=1}) \subset K_m((t)) \otimes_K D_{\mathrm{dR}}(V)$ si $m \geq m(V)$, ce qui termine la démonstration du iii) du théorème IV.2.1.

Remarque IV.2.4. L'entier $m(V)$ n'a a priori aucun lien avec $n(V)$ comme le montre l'exemple suivant. Supposons $K = \mathbf{Q}_p$. Le sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de K_n constitué des éléments vérifiant $\mathrm{Tr}_{K_n/K_{n-1}}(x) = 0$ est stable par $\mathcal{G}_K$ et nous fournit une représentation p-adique V de $\mathcal{G}_K$. Comme $\mathcal{G}_K$ agit à travers Γ_K sur V, on peut prendre $n(V) = 0$, mais un petit calcul montre que l'on doit avoir $m(V) \geq n$.

3. **Lien avec l'application logarithme de Perrin-Riou.** Notre but dans ce paragraphe est de comparer, dans le cas où V est de de Rham, l'application $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}$ construite au chapitre II avec l'application "logarithme de Perrin-Riou" construite dans [5]. Commençons par rappeler la construction de cette application logarithme.

Proposition IV.3.1. *Soit V une représentation de de Rham. Soit W le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes V)^{\mathcal{G}_{K_n}}$. Soit $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$ tel que $\int_{\Gamma_{K_n}} \mu \in H^1_e(K_n, V)$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$ et $\tau \to \mu_\tau$ un cocycle continu représentant μ. Finalement, si $n \gg 0$, soit c_n l'unique élément de $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes V)/W$ vérifiant $(1-\tau)c_n = \int_{\Gamma_{K_n}} \mu_\tau$ quel que soit $\tau \in \mathcal{G}_{K_n}$.*

i) La suite de terme général $p^n c_n$ converge dans $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes V)/W$ vers un élément de $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes V)^{\mathcal{H}_K}/W$ noté $\mathrm{Log}_V(\mu)$.

ii) Si $n \in \mathbf{N}$, alors

$$t\frac{d}{dt}\mathrm{T}_n(\mathrm{Log}_V(\mu)) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \exp^*_{V^*(1+k)}\Big(\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-k}\mu\Big).$$

Remarque IV.3.2. i) Il existe $k_0 \in \mathbf{Z}$ tel que la condition $\int_{\Gamma_{K_n}} \mu \in H^1_e(K_n, V)$ quels que soient $n \in \mathbf{N}$ et $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$ soit automatique si on remplace V par $V(k)$ pour $k \geq k_0$.

ii) L'opérateur $\frac{d}{dt}$ tue $K_\infty \otimes D_{\mathrm{dR}}(V)$ et (a fortiori) W, ce qui explique que l'on n'ait pas besoin de passer au quotient par W dans la formule du ii).

iii) Dans [5], est construite pour chaque entier $h \geq 1$ une application $\mathrm{Log}^{(h)}_V$. L'application Log_V ci-dessus correspond à $h = 1$ et la proposition ci-dessus est la réunion des théorèmes VI.3.1 et VII.1.1 de [5].

Le lien entre les applications Log_V et $\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}$ dans le cas où V est de de Rham, est fourni par le théorème suivant.

Théorème IV.3.3. *Soit V une représentation de de Rham de $\mathcal{G}_K$. Il existe $m(V) \geq n(V)$ tel que si $m \geq m(V)$ et $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$ est tel que $\int_{\Gamma_{K_n}} \mu \in H^1_e(K_n, V)$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$, alors*

$$p^{-m}\varphi^{-m}(\mathrm{Exp}^*_{V^*(1)}(\mu)) = t\frac{d}{dt}(\mathrm{T}_m(\mathrm{Log}_V(\mu))).$$

Démonstration. Compte-tenu du ii) de la proposition IV.3.1, c'est une conséquence immédiate des ii) et iii) du théorème IV.2.1.

Remarque IV.3.4. Il est tout à fait possible que ce théorème soit vide, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun élément non nul de $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$ vérifiant ses hypothèses mais, comme nous l'avons signalé plus haut, si on remplace V par $V(k)$ pour $k \gg 0$, les hypothèses du théorème sont vérifiées pour tout élément de $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$.

V. La représentation $\mathbf{Q}_p(1)$ et l'isomorphisme de Coleman

1. **Représentants multiplicatifs.** Rappelons que $\mathbf{B}$ est une extension de degré p de $\varphi(\mathbf{B})$ (totalement ramifiée car l'extension résiduelle est radicielle). Définissons une application multiplicative $\mathrm{N} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ par la formule $\mathrm{N}(x) = \varphi^{-1}(\mathrm{N}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}(x))$; ceci fait de N l'analogue multiplicatif de l'application ψ définie au §5 du chapitre I.

Lemme V.1.1. *Si $x \in \mathbf{E}^*$ et U_x désigne l'ensemble de $y \in \mathbf{A}$ dont la réduction modulo p est x, alors N est une application contractante de U_x pour la topologie p-adique.*

Corollaire V.1.2. *i) Si $x \in \mathbf{E}$, il existe un unique élément $\hat{x} \in \mathbf{A}$ dont l'image modulo p est x et tel que $\mathrm{N}(\hat{x}) = \hat{x}$.*

ii) Si x et y sont deux éléments de $\mathbf{E}$, alors $\widehat{xy} = \hat{x}\hat{y}$.

Démonstration. Le i) du corollaire est une conséquence du lemme si $x \neq 0$ et de la complétude de U_x pour la topologie p-adique. D'autre part, $\mathrm{N}(p^k\mathbf{A}) \subset p^{pk}\mathbf{A}$, ce qui prouve que 0 est le seul élément y de $p\mathbf{A}$ vérifiant $\mathrm{N}(y) = y$. Le ii) est, quant à lui, une conséquence de l'unicité démontrée dans le i).

Passons à la démonstration du lemme. Remarquons que N induit l'identité sur $\mathbf{E}$ et donc laisse stable U_x. D'autre part, si $y \equiv 1 \bmod p^k$, on a

$$\mathrm{N}(y) \equiv 1 + \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}(y-1) = 1 + p\psi(y-1) \mod p^{2k},$$

ce qui implique en particulier $\mathrm{N}(y)-1\in p^{k+1}\mathbf{A}$. On en déduit le fait que si y_1,y_2 sont deux éléments de U_x vérifiant $y_1-y_2\in p^k\mathbf{A}$, alors $\mathrm{N}(y_1)-\mathrm{N}(y_2)=\mathrm{N}(y_2)(\mathrm{N}(y_2^{-1}y_1)-1)\in p^{k+1}\mathbf{A}$, ce qui permet de conclure.

Remarque V.1.3. On dispose de deux applications multiplicatives de $\mathbf{E}$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}$, à savoir l'application $x\to\hat{x}$ et celle qui à x associe son représentant de Teichmüller $[x]$, mais il faut faire attention au fait que l'on a $\hat{x}\neq[x]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ sauf si $x\in\overline{\mathbf{F}}_p$.

Lemme V.1.4. *Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et $d=[\mathbf{B}_K:\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}]=[K_\infty:\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})]$. Si $n(K)$ est le plus petit entier $n\geq 2$ tel qu'il existe $e_1,\dots,e_d\in\mathbf{A}_K^{\dagger,n}$ tels que $\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_d)$ forment une base de $\mathbf{A}_K^{\dagger,n+1}$ sur $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}^{\dagger,n+1}$ et si $n\geq n(K)$, alors $\mathrm{N}(\mathbf{A}_K^{\dagger,n+1})\subset\mathbf{A}_K^{\dagger,n}$.*

Démonstration. Par définition de $n(K)$, si $n\geq n(K)$ et $x\in\mathbf{A}_K^{\dagger,n+1}$, on peut écrire x sous la forme $x=\sum_{i=1}^d x_i\varphi(e_i)$ avec $x_i\in\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}^{\dagger,n+1}$. D'autre part, on peut écrire x_i sous la forme $x_i=\sum_{j=0}^{p-1}x_{i,j}[\varepsilon]^j$ avec $x_{i,j}=\varphi(\psi([\varepsilon]^{-j}x))$ et le corollaire I.6.3 allié au ii) de la proposition III.2.1 montre que l'on a $x_{i,j}\in\varphi(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}^{\dagger,n})$. On en déduit le fait que les coordonnées $y_j=\sum_{i=1}^d x_{i,j}\varphi(e_i)$ de x dans la base $1,[\varepsilon],\dots,[\varepsilon]^{p-1}$ de $\mathbf{B}$ sur $\varphi(\mathbf{B})$, appartiennent à $\mathbf{A}_K^{\dagger,n+1}\cap\varphi(\mathbf{B})=\varphi(\mathbf{A}_K^{\dagger,n})$. Maintenant, $\mathrm{N}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}(x)$ est le déterminant de la multiplication par x dans $\mathbf{B}$ considéré comme espace vectoriel de dimension p sur $\varphi(\mathbf{B})$; c'est donc le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} y_0 & [\varepsilon]^p y_{p-1} & \cdots & [\varepsilon]^p y_1 \\ y_1 & y_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & [\varepsilon]^p y_{p-1} \\ y_{p-1} & y_{p-2} & \cdots & y_0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'appartenance de $\mathrm{N}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}(x)$ à $\varphi(\mathbf{A}_K^{\dagger,n})$, ce qui, étant-donnée la relation $\mathrm{N}=\varphi^{-1}\circ\mathrm{N}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}$, permet de conclure.

Corollaire V.1.5. *Si $x\in\mathbf{E}_K^+$, alors $\hat{x}\in\mathbf{A}_K^{\dagger,n(K)}$. De plus, si K est non ramifiée sur $\mathbf{Q}_p$ et $x\in\mathbf{E}_K^+$, alors $\hat{x}\in\mathbf{A}_K^+=\mathbf{A}_K\cap\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}=\mathcal{O}_K[[\pi]]$.*

Démonstration. Soit $v\in\mathbf{A}_K^\dagger$ dont l'image dans $\mathbf{E}_K$ est x et soit $n\geq n(K)$ tel que $v\in\mathbf{A}_K^{\dagger,n}$. Soit $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ la suite d'éléments de $\mathbf{A}_K$ définie par récurrence grâce aux formules $v_0=v$ et $v_k=\mathrm{N}(v_{k-1})$ si $k\geq 1$. D'après le lemme V.1.1, la suite de terme général v_k tend vers $\hat{x}$ dans $\mathbf{A}_K$ quand k tend vers $+\infty$. D'autre part, le lemme V.1.4 implique que $v_k\in\mathbf{A}_K^{\dagger,n}$ quel que soit $k\in\mathbf{N}$ et comme $\mathbf{A}_K^{\dagger,n}$ est relativement compact dans $\mathbf{A}_K^{\dagger,n+1}$, cela implique $\hat{x}\in\mathbf{A}_K^{\dagger,n+1}$ et on conclut en utilisant de nouveau le lemme V.1.4 pour descendre de $\mathbf{A}_K^{\dagger,n+1}$ à $\mathbf{A}_K^{\dagger,n(K)}$.

Dans le cas où K est non ramifiée sur $\mathbf{Q}_p$, la réduction modulo p induit une surjection de $\mathbf{A}_K^+$ sur $\mathbf{E}_K^+$ et comme $\mathbf{A}_K^+$ est un sous-anneau fermé de $\mathbf{A}_K$ stable par N, la même démonstration que ci-dessus en partant de $v\in\mathbf{A}_K^+$ montre que $\hat{x}\in\mathbf{A}_K^+$.

2. **Séries de Coleman généralisées.** Commençons par rappeler la construction des séries de Coleman [4].

Proposition V.2.1. *Soit F une extension finie non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$. Si $u = (u^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est un élément de la limite projective $\varprojlim \mathcal{O}_{F_n}^*$ des $\mathcal{O}_{F_n}^*$ relativement aux applications normes, il existe une unique série $\mathrm{Col}_u(T)$ élément de $(\mathcal{O}_F[[T]])^*$ telle que l'on ait $\mathrm{Col}_u^{\varphi^{-n}}(\varepsilon^{(n)}-1) = u^{(n)}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

Notre but est de généraliser cette proposition au cas où on ne suppose plus forcément F non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$ en utilisant les résultats du paragraphe précédent et la bijection ι_K de $\varprojlim \mathcal{O}_{K_n}$ sur $\mathbf{E}_K^+$ (proposition I.1.1).

Lemme V.2.2. *Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et $n \geq n(K)$, alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_K^{\dagger,n+1} & \xrightarrow{\mathrm{N}} & \mathbf{A}_K^{\dagger,n} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi^{-(n+1)}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi^{-n}} \\ K_{n+1}[[t]] & \xrightarrow{\mathrm{N}_{K_{n+1}/K_n}} & K_n[[t]] \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. Par définition $\mathrm{N}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}(x)$ (resp. $\mathrm{N}_{K_{n+1}/K_n}(\varphi^{-(n+1)}(x))$) est le déterminant de la multiplication par x (resp. $\varphi^{-(n+1)}(x)$) sur $\mathbf{B}$ (resp. $K_{n+1}[[t]]$) considéré comme $\varphi(\mathbf{B})$-espace vectoriel (resp. $K_n[[t]]$-module) et la commutativité du diagramme suit de ce que $\varphi^{-(n+1)}$ est un homomorphisme d'anneaux et $\varphi^{-n}\circ \mathrm{N} = \varphi^{-(n+1)} \circ \mathrm{N}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}$.

Notons θ_n le morphisme $\theta\circ\varphi^{-n}$ de $\mathbf{B}^{\dagger,n}$ dans $\mathbf{C}_p$.

Lemme V.2.3. *Si $u = (u^{(n)}) \in \varprojlim \mathcal{O}_{K_n}$ et $n \geq n(K)$, alors $\theta_n(\widehat{\iota_K(u)})) = u^{(n)}$.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, $(\theta_n(\widehat{\iota_K(u)}))_{n\geq n(K)}$ appartient à $\varprojlim \mathcal{O}_{K_n}$. D'autre part, comme $[\iota_K(u)] - \widehat{\iota_K(u)} \in \widetilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger,n(K)} \cap p\widetilde{\mathbf{A}}$, cela implique que si $n \geq n(K)$, alors $v_p(\theta_n([\iota_K(u)]) - \theta_n(\widehat{\iota_K(u)})) \geq 1 - \frac{1}{p^{n-n(K)}}$ et comme $v_p(\theta_n([\iota_K(u)]) - u^{(n)}) \geq \frac{1}{p}$ si n est assez grand, on voit que $(\theta_n(\widehat{\iota_K(u)}))_{n\geq n(K)}$ a même image que u dans $\mathbf{E}_K^+$ (cf. proposition I.1.1) et donc lui est égal, ce qui permet de conclure.

Proposition V.2.4. *Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, $F = K_\infty \cap \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ et $e = [K_\infty : F_\infty]$.*

i) Si $e = 1$ et $u \in \varprojlim \mathcal{O}_{K_n}$, alors $\widehat{\iota_K(u)} = \mathrm{Col}_u(\pi)$.

ii) Dans le cas $e \geq 2$, il existe des séries de Laurent $f_0, \dots, f_{e-1} \in \mathcal{O}_F((T))$ convergeant sur la couronne $0 < v_p(x) \leq \frac{1}{(p-1)p^{n(K)-1}}$ telles que, si $n > n(K)$, alors $(u^{(n)})^e + f_{e-1}^{\varphi^{-n}}(\varepsilon^{(n)}-1)(u^{(n)})^{e-1} + \cdots + f_0^{\varphi^{-n}}(\varepsilon^{(n)}-1) = 0$.

Démonstration. Le i) est la reformulation de Fontaine [8] de l'isomorphisme de Coleman et suit de ce que $\widehat{\iota_K(u)} \in \mathbf{A}_F^+$ si $u \in \varprojlim \mathcal{O}_{K_n}$ d'après le corollaire V.1.5. En particulier, il existe $f \in \mathcal{O}_F[[T]]$ tel que l'on ait $\widehat{\iota_K(u)} = f(\pi)$. On peut alors appliquer θ_n à cette égalité et utiliser le lemme V.2.3 pour obtenir l'égalité $u^{(n)} = f^{\varphi^{-n}}(\varepsilon^{(n)}-1)$, ce qui, compte-tenu de la caractérisation de la série Col_u, permet de conclure.

ii) D'après le corollaire V.1.5, $\widehat{\iota_K(u)} \in \mathbf{A}_K^{\dagger,n(K)}$. D'autre part, $\mathbf{A}_K^{\dagger,n(K)}$ est de dimension e sur $\mathbf{A}_F^{\dagger,n(K)}$ (c'est une conséquence de la définition de $n(K)$); on peut donc trouver des éléments $\tilde{f}_0,\dots,\tilde{f}_{e-1} \in \mathbf{A}_F^{\dagger,n(K)}$ tels que l'on ait $\widehat{\iota_K(u)}^e + \tilde{f}_{e-1}\widehat{\iota_K(u)}^{e-1} + \cdots + \tilde{f}_0 = 0$. Finalement, d'après le i) de la proposition III.2.1, si $0 \le i \le e-1$, il existe une unique série de Laurent f_i convergeant sur la couronne $0 < v_p(x) \le \frac{1}{(p-1)p^{n(K)-1}}$ telle que l'on ait $\tilde{f}_i = f_i(\pi)$ et il suffit d'appliquer θ_n pour $n \ge n(K)$, à la relation $\widehat{\iota_K(u)}^e + \tilde{f}_{e-1}\widehat{\iota_K(u)}^{e-1} + \cdots + \tilde{f}_0 = 0$ et d'utiliser le lemme V.2.3 pour obtenir le résultat souhaité.

3. Les applications $\mathrm{Log}_{\mathbf{Q}_p(1)}$ et $\mathrm{Exp}^*_{\mathbf{Q}_p}$.

Lemme V.3.1. *Si $u \in \mathbf{E}_K$, la suite de terme général $(\varphi^{-n}(\widehat{\iota_K(u)}))^{p^n}$ converge vers $[\iota_K(u)]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.*

Démonstration. Comme $\widehat{\iota_K(u)} \in \mathbf{A}^{\dagger,n(K)}$ et a pour image $\iota_K(u)$ dans $\mathbf{E}$, il s'écrit sous la forme $[\iota_K(u)] + \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$, où les x_k sont des éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}$ vérifiant $v_{\mathbf{E}}(x_k) \ge -kp^{n(K)}$. On en tire la formule $v_n = \varphi^{-n}(\widehat{\iota_K(u)}) = [\iota_K(u)^{p^{-n}}] + \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k^{p^{-n}}]$ et la congruence $v_n^{p^n} \equiv [\iota_K(u)] \bmod p^{n+1}\widetilde{\mathbf{A}}$, ce qui permet de démontrer la convergence dans $\widetilde{\mathbf{A}}$. Maintenant, soit α un élément de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ vérifiant $v_{\mathbf{E}}(\alpha) = \frac{p-1}{p}$, ce qui fait que la suite de terme général $\left(\frac{p}{[\alpha]}\right)^i$ tend vers 0 dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ quand i tend vers $+\infty$. Si $n \ge n(K)+1$, la formule ci-dessus montre que v_n appartient au sous-anneau A de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ des éléments de la forme $y = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i\left(\frac{p}{[\alpha]}\right)^i$, où les y_i sont des éléments de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ et que l'on a de plus, $v_n - [\iota_K(u)^{p^{-n}}] \in \frac{p}{[\alpha]}A$. On en déduit le fait que $v_n^{p^n}$ tend vers $[\iota_K(u)]$ dans A et donc a fortiori dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, ce qu'il fallait démontrer.

Soit $\delta_n : K_n^* \to H^1(K_n, \mathbf{Q}_p(1))$ l'application fournie par la théorie de Kummer. Comme $\mathrm{cor}_{K_{n+1}/K_n} \circ \delta_{n+1} = \delta_n \circ \mathrm{N}_{K_{n+1}/K_n}$, cela permet, passant à la limite projective, de construire une application δ de la limite projective $\varprojlim K_n^*$ des K_n^* relativement aux applications normes dans $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, \mathbf{Q}_p(1))$.

Proposition V.3.2. *Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et $u \in \varprojlim \mathcal{O}_{K_n}^*$.*

i) $\mathrm{Log}_{\mathbf{Q}_p(1)}(\delta(u)) = t^{-1}\log[\iota_K(u)]$.

ii) Si $n \ge n(K)$, alors $\mathrm{T}_n(\mathrm{Log}_{\mathbf{Q}_p(1)}(\delta(u))) = t^{-1}\log\varphi^{-n}(\widehat{\iota_K(u)})$.

iii) $\mathrm{Exp}^*_{\mathbf{Q}_p}(\delta(u)) = \widehat{\iota_K(u)}^{-1}\nabla\widehat{\iota_K(u)}$, *où ∇ est la dérivation définie au paragraphe III.2.*

Démonstration. Si l'on regarde comment est fabriquée l'application δ fournie par la théorie de Kummer, on s'aperçoit que si u_n est n'importe quel élément de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ vérifiant $u_n^{(0)} = u^{(n)}$, alors $\tau \to (1-\tau)\left(\frac{\log[u_n]}{t}(1)\right)$ est un 1-cocycle sur $\mathcal{G}_{K_n}$ à valeurs dans $\mathbf{Q}_p(1)$ dont l'image dans $H^1(K_n, \mathbf{Q}_p(1))$ est égale à $\delta_n(u^{(n)})$. Comme on a supposé $u^{(n)} \in \mathcal{O}_{K_n}^*$, on a $\log[u_n] \in \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\frac{\log[u_n]}{t}(1) \in \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes \mathbf{Q}_p(1)$, ce qui prouve que $\delta_n(u^{(n)}) \in H^1_e(K_n, \mathbf{Q}_p(1))$. On en déduit la formule

$$\mathrm{Log}_{\mathbf{Q}_p(1)}(\delta(u)) = \lim_{n\to+\infty} p^n \frac{\log[u_n]}{t} = t^{-1} \lim_{n\to+\infty} \log([u_n]^{p^n}).$$

Finalement, on a $v_p(\theta([\iota_K(u)^{p^{-n}}])-\theta([u_n]))\geq\frac{1}{p}$ si n est assez grand, ce qui permet de montrer que la suite de terme général $[u_n]^{p^n}$ tend vers $[\iota_K(u)]$ quand n tend vers $+\infty$. On en déduit le i).

ii) D'après le i) et le lemme V.3.1, on a

$$\mathrm{T}_n(\mathrm{Log}_{\mathbf{Q}_p(1)}(\delta(u)))=t^{-1}\lim_{m\to+\infty}\mathrm{T}_m(p^m\log(\varphi^{-m}(\widehat{\iota_K(u)}))).$$

D'autre part, si $m\geq n$, on a $\mathrm{T}_n=\mathrm{Tr}_{K_m[[t]]/K_n[[t]]}\circ\mathrm{T}_m$ et comme $\varphi^{-m}(\widehat{\iota_K(u)})\in K_m[[t]]$ et que la restriction de T_m à $K_m[[t]]$ est la multiplication par p^{-m}, on obtient la formule

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_n(\mathrm{Log}_{\mathbf{Q}_p(1)}(\delta(u)))&=t^{-1}\lim_{m\to+\infty}\mathrm{Tr}_{K_m[[t]]/K_n[[t]]}(\log(\varphi^{-m}(\widehat{\iota_K(u)})))\\&=t^{-1}\lim_{m\to+\infty}\log(\mathrm{N}_{K_m[[t]]/K_n[[t]]}(\varphi^{-m}(\widehat{\iota_K(u)})))\end{aligned}$$

et on termine la démonstration du ii) en utilisant le lemme V.2.2.

iii) Pour relier $\mathrm{Exp}^*_{\mathbf{Q}_p}(\delta(u))$ et $\mathrm{Log}_{\mathbf{Q}_p(1)}(\delta(u))$ grâce au théorème IV.3.3, il faut remarquer que t^{-1} est un générateur de $D_{\mathrm{dR}}(\mathbf{Q}_p(1))$. Le ii) et le théorème IV.3.3 impliquent alors que si n est assez grand, on a

$$\begin{aligned}\varphi^{-n}(\mathrm{Exp}^*_{\mathbf{Q}_p}(\delta(u)))&=t^{-1}\Big(t\frac{d}{dt}\big(p^n\log\varphi^{-n}(\widehat{\iota_K(u)})\big)\Big)\\&=p^n\,\frac{\frac{d}{dt}(\varphi^{-n}(\widehat{\iota_K(u)}))}{\varphi^{-n}(\widehat{\iota_K(u)})}\\&=\varphi^{-n}\Big(\widehat{\iota_K(u)}^{-1}\nabla\widehat{\iota_K(u)}\Big)\quad\text{d'après le lemme III.2.3,}\end{aligned}$$

ce qui permet de démontrer le iii).

References

[1] Bloch S., Kato K.: *L functions and Tamagawa numbers of motives*. Dans "The Grothendieck Festchrift", vol. 1, 333-400, Prog. Math., vol. 86, Birkhaüser 1990. MR **92g:**11063

[2] Cherbonnier F.: Représentations p-adiques surconvergentes, thèse de l'université d'Orsay, 1996.

[3] Cherbonnier F., Colmez P.: Représentations p-adiques surconvergentes, Inv. Math. (à paraître).

[4] Coleman R.: Division values in local fields, Inv. Math. 53, 91-116, 1979. MR **81g:**12017

[5] Colmez P.: Théorie d'Iwasawa des Représentations de de Rham d'un Corps Local, Ann. of Math. (à paraître).

[6] Colmez P.: Représentations cristallines et représentations de hauteur finie, Prépublication du LMENS-97-28, 1997.

[7] Fontaine J.-M., Wintenberger J.-P.: Le corps des normes de certaines extensions algébriques de corps locaux, C.R.A.S. 288, 367-370, 1979. MR **80b:**12015

[8] Fontaine J.-M.: Représentations p-adiques des corps locaux, dans "The Grothendieck Festschrift", vol II, 249-309, Birkhaüser 1991. MR **92i:**11125

[9] Fontaine J.-M.: Le corps des périodes p-adiques. dans "Périodes p-adiques" exposé II, Astérisque 223, 59-102, 1994. MR **95k:**11086

[10] Fontaine J.-M.: Représentations p-adiques semi-stables, dans "Périodes p-adiques" exposé III, Astérisque 223, 113-184, 1994. MR **95g:**14024

[11] Herr L.: Cohomologie Galoisienne des corps p-adiques, thèse de l'université d'Orsay, 1995.

[12] Kato, K.: Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, dans "Arithmetic Algebraic Geometry", Lecture Notes in math. 1553, 1993. MR **96f:**11067

[13] Perrin-Riou B.: Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local. Inv. Math. 115, 81-149, 1994. MR **95c:**11082

[14] Wintenberger J.-P.: Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux; applications, Ann. Sci. E.N.S. 16, 59-89, 1983. MR **85e:**11098

33 Rue de Poissy, 75005 Paris, France
E-mail address: `frederic.cherbonnier@francetelecom.fr`

Département de Mathématiques et Informatique, École Normale Supérieure, U.R.A. 762 du C.N.R.S., 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France
E-mail address: `colmez@dmi.ens.fr`

Équipe d'Arithmétique, Institut de Mathématiques, U.M.R. 9994 du C.N.R.S., 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France